

Approximation rationnelle de
sous-espaces vectoriels
Rational approximation of linear subspaces

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay

Ecole Doctorale de Mathématiques Hadamard (EDMH) n° 574
Spécialité de doctorat : Mathématiques fondamentales
Unité de recherche : Université Paris-Saclay, CNRS, Laboratoire de
mathématiques d'Orsay, 91405, Orsay, France.
Réfèrent : Faculté des sciences d'Orsay

**Thèse présentée et soutenue à Paris-Saclay,
le 19 mai 2021, par**

Elio JOSEPH

Composition du jury

Frédéric PAULIN Professeur, Université Paris-Saclay	Président
Michel LAURENT Professeur, Université d'Aix-Marseille	Rapporteur & Examineur
Nikolay MOSHCHEVITIN Professeur, Université de Moscou	Rapporteur & Examineur
Yann BUGEAUD Professeur, Université de Strasbourg	Examineur
Nicolas DE SAXCÉ Chargé de recherche, Université Sorbonne Paris-Nord	Examineur

Direction de la thèse

Stéphane FISCHLER Maître de Conférences, Université Paris-Saclay	Directeur de thèse
--	--------------------

université
PARIS-SACLAY

FACULTÉ
DES SCIENCES
D'ORSAY



Fondation mathématique

FMJH

Jacques Hadamard



À Michel Fournier.

Remerciements

En tout premier lieu, j'adresse de sincères remerciements à mon directeur de thèse, Stéphane Fischler. Merci pour la disponibilité constante, merci pour toutes les relectures aussi nombreuses qu'attentives, merci pour la confiance accordée en me laissant de l'autonomie dans le travail de recherche, et enfin merci pour tous les conseils avisés qui m'éclairèrent pendant ces trois années.

Je remercie chaleureusement les deux rapporteurs de cette thèse, Michel Laurent et Nikolay Moshchevitin, pour avoir généreusement donné de leur temps pour relire cette thèse. Merci pour votre intérêt et vos retours précieux. Un grand merci également à Yann Bugeaud, Frédéric Paulin et Nicolas de Saxcé pour avoir accepté de faire partie du jury, je vous en suis très reconnaissant.

Un grand merci à tous les chercheurs, enseignants et doctorants que j'ai pu croiser pendant mon doctorat, spécifiquement ceux que j'ai croisés à Cambridge, Istanbul et Orsay. Je remercie tout spécialement les doctorants du Laboratoire de Mathématiques d'Orsay. De peur d'en oublier, je ne prends pas le risque de les citer nommément, excepté mes valeureux co-bureau : Cyril Falcon, Hugo Federico, Guillaume Maillard et Adrien Béguinet.

Merci à Cyril Falcon pour avoir lancé avec moi le séminaire *Explique-moi...*, merci à Nathalie Carrière pour l'aide précieuse à l'organisation, et merci à Ella Blair et Adrien Béguinet pour l'avoir repris fin 2020.

J'adresse toute ma reconnaissance à Stéphane Fischler, Lucie Flammarion et Boris Joseph pour leurs relectures attentives de ce manuscrit. Toute erreur qui subsisterait reste évidemment de mon fait.

Merci à Yoann Pouligo, Louis Vialle, Hugo Guichaoua, Hugo Lefèvre, Morgan Catez, Stéphane Zlammansuck, Vincent Galbrun, Benoît Vacher, Anthony de Oliveira, Hippolyte Beaudroit, Matthieu Perrin, Maxime Caramona, Alexandre de Lemos, Donovan Dugeny, Benoît Sabourin, Florian Dangleant, Clément Labadie, Yoshi et les autres pour les drôles de moments pendant la préparation de cette thèse, ainsi que pour la convivialité pendant les corrections de copies.

Je suis reconnaissant aux professeurs qui auront, chacun à leur façon, contribué à la poursuite de mes études mathématiques. Pour n'en citer que quelques-uns, je remercie François Bertholon, Bruno Arsac, Etienne Fouvry, et bien sûr Olivier Fouquet.

C'est grâce à leur présence bienveillante et à leur complicité enjouée que la vie fut si joyeuse pendant ces trois dernières années. Je remercie tout particulièrement et par ordre alphabétique Alexandre Barrat pour m'avoir allégé d'une grande tâche, Charles Bignaud et Raphaël Huille pour la vie dans la forêt, Clément Jean et Lauren Oliel pour les apéros bios, Clément Walter pour les apéros-fléchettes, Cyril Falcon pour les nombreuses et diverses aventures, Camille Masson, Faustin Besiers, Joris Baraillon et Julien Crémy pour les vacances colorées, Florian Granger et Gédéon Chevallier pour les blagues et les grandes nouvelles, Hugo Federico pour les parties d'échecs, Lucie Flammarion pour toute la vie, Marguerite et Guillaume Matheron pour leur céleste présence, Olivier Remblière pour tout le sport, Sandrine Gauthier pour les repas toujours joyeux, Thomas Gastellu pour les gardes et Victoria Soubeiran pour les nouvelles d'outre-mer.

Je remercie chaleureusement tous ceux qui ont émis l'idée de venir assister à ma soutenance ou qui ont proposé leur aide pour le pot.

Je remercie du fond du cœur ma famille, pour leur soutien et leur présence attentive. Plus particulièrement ma sœur Fanny et mes parents Anne et Boris.

Enfin, j'adresse non sans malice un merci tout particulier à ma chère fiancée et complice Lucie Flammarion. Cette thèse est évidemment trop courte pour te remercier entièrement, mais je souligne ici ton rayonnement quotidien, ton humour joyeux et tes conseils éclairés. Chère Lucie, *904195€1090114* !

Table des matières

Table des matières	9
1 Introduction	11
1.1 Approximation diophantienne rationnelle classique	11
1.2 Approximation diophantienne de sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n	12
1.3 Présentation des résultats en direction du problème 1.12	17
1.3.1 Les résultats originaux de Schmidt	17
1.3.2 Le cas $\min(d, e) = 1$	19
1.3.3 Les résultats de Moshchevitin	20
1.3.4 Les résultats de Saxcé	22
1.4 Plan de la thèse et résultats principaux	23
1.5 Les résultats connus jusqu'en dimension 6	25
1.6 Une conjecture sur $\hat{\mu}_n(d e)_e$	27
2 Des outils	29
2.1 Outils liés à la hauteur	29
2.1.1 Les coordonnées de Plücker	29
2.1.2 Déterminant généralisé	33
2.1.3 Comportement de la hauteur vis-à-vis d'une transformation linéaire	34
2.2 Sur la proximité	36
2.3 Deux résultats d'approximation simultanée	41
2.4 Théorèmes de Going-up et Going-down	42
3 Différents cas particuliers	45
3.1 Outils en toute dimension	45
3.2 Dans \mathbb{R}^4	46
3.2.1 Construction de plans mal approchés de $\mathfrak{J}_4(2, 2)_1$	47
3.2.2 Les preuves	48
3.3 Dans \mathbb{R}^5	52
3.3.1 Construction de sous-espaces mal approchés de $\mathfrak{J}_5(3, 2)_1$	52
3.3.2 Les preuves	54
3.4 Commentaires généraux	63
3.5 Application d'un résultat de Moshchevitin	63

4	Approximation de sommes directes de sous-espaces vectoriels	67
4.1	Les résultats obtenus	67
4.1.1	Un résultat d'approximation	67
4.1.2	Comportement de la proximité par sommes directes	68
4.2	Les preuves	69
4.2.1	Proximité et sommes directes	69
4.2.2	Minoration de $\mu_n(d e)_j$	72
5	Inclusion dans un sous-espace vectoriel rationnel	77
5.1	Le théorème principal	77
5.2	Applications du théorème principal	78
5.3	Démonstration du théorème 5.1	80
6	Le spectre de $\mu_n(\bullet \ell)_\ell$	91
6.1	Construction d'un sous-espace d'exposant prescrit	92
6.2	Les preuves	95
	Bibliographie	113

Chapitre 1

Introduction

La thèse qui suit s'inscrit dans le domaine de l'approximation diophantienne. On expose brièvement ce domaine dans la section 1.1, puis on introduit le problème de l'approximation diophantienne de sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n dans la section 1.2. La section 1.3 est consacrée à une présentation des résultats connus de ce domaine. Enfin, un plan de la thèse et des résultats principaux obtenus se trouve dans la section 1.4, une présentation explicite des résultats connus et obtenus jusqu'en dimension 6 est donnée dans la section 1.5, et une conjecture est formulée dans la section 1.6.

1.1 Approximation diophantienne rationnelle classique

On introduit ici le domaine de l'approximation diophantienne avec un double objectif. Le premier objectif est d'exposer de manière large l'endroit où se situe ce travail dans le monde mathématique, le second est de préparer l'introduction de notions qui serviront de façon centrale dans cette thèse. Ces notions pourront alors être comparées à celles vues dans cette section en approximation diophantienne rationnelle classique.

L'approximation diophantienne a pour but originel d'approcher les nombres réels par des nombres rationnels. Plus précisément, pour un réel ξ donné, on cherche un rationnel p/q tel que la quantité

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right|$$

soit la plus petite possible. Par densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , ce problème n'a pas d'intérêt en l'état, cette quantité pouvant être rendue arbitrairement petite pour tout réel ξ .

On précise donc la question en demandant que le rationnel p/q approchant le réel ξ soit le moins *compliqué* possible. Plus précisément, on veut lier la *qualité* de l'approximation $|\xi - p/q|$ à la *complexité* du rationnel. Ainsi, s'autoriser des rationnels plus compliqués impose d'obtenir en retour une approximation plus précise.

Écrivons plus rigoureusement ceci. On donne une notion de *complexité* d'un rationnel en regardant la taille de son dénominateur. On fixe alors un réel $\xi \in \mathbb{R}$, et on cherche les réels $\mu > 0$ tels qu'il existe une infinité de rationnels p/q vérifiant

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^\mu}. \quad (1.1)$$

Un nombre émerge naturellement de ce problème : l'*exposant d'irrationalité* de ξ . Celui-ci est défini comme la borne supérieure de l'ensemble des réels $\mu > 0$ vérifiant l'inégalité (1.1) pour une infinité de nombres rationnels p/q . On notera par la suite $\mu(\xi)$ cette borne supérieure (éventuellement infinie). C'est ce nombre qui est au coeur de la théorie de l'approximation diophantienne.

De nombreux résultats sont connus sur cette quantité, mais des conjectures demeurent. Par exemple, le théorème de Dirichlet (19^{ème} siècle) affirme que si ξ est irrationnel, alors pour tout entier $Q \geq 1$, il existe deux entiers p et q , avec $q \in \{1, \dots, Q\}$, tels que

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{qQ}.$$

De ceci on déduit immédiatement que pour tout $\xi \notin \mathbb{Q}$, $\mu(\xi) \geq 2$. On peut aussi énoncer un théorème profond (théorème page 2 de [Rot55]) que K. F. Roth a démontré en 1955 en s'appuyant sur des travaux de Thue, Siegel et Dyson : si ξ est un nombre algébrique de degré au moins 2, alors $\mu(\xi) = 2$. La réciproque étant fautive : on peut par exemple montrer que $\mu(e) = 2$.

Enfin, on mentionne que c'est la théorie des fractions continues – à laquelle une introduction claire peut être trouvée dans le livre [HW07] de G. H. Hardy et E. M. Wright – qui permet de répondre à de nombreuses questions d'approximation diophantienne. Les fractions continues permettent notamment de montrer que

$$\left\{ \mu(\xi), \xi \in \mathbb{R} \right\} = \{1\} \cup [2, +\infty].$$

Les nombres ξ tels que $\mu(\xi) = +\infty$ sont appelés *nombres de Liouville*, et ce sont eux qui fournissent le premier nombre transcendant défini explicitement ([Lio44] pages 910–911).

Le lecteur qui souhaite approfondir le sujet de l'approximation diophantienne rationnelle classique peut consulter [Niv63], [Cas57] ou encore [Sch80], et [TT96] au sujet de l'approximation diophantienne de matrices.

1.2 Approximation diophantienne de sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n

Cette thèse suit l'idée donnée par W. M. Schmidt en 1967 dans un article fondateur [Sch67]. L'idée consiste à généraliser le problème de l'approximation diophantienne

rationnelle classique qui a été introduit en section 1.1, pour créer une théorie de l'approximation diophantienne des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n .

Il est alors intéressant de raisonner de façon similaire à l'approximation diophantienne classique. Soient $n \geq 2$ et $d, e \in \{1, \dots, n-1\}$ tels que $d+e \leq n$. Soit A un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n de dimension d . Le but est de chercher à *approcher* l'espace A par des sous-espaces *rationnels* B de dimension e "pas trop" *compliqués*. Pour formaliser ce problème, il reste donc à définir les termes *rationnel*, *approcher* et *compliqué*.

Remarque 1.1 Comme le fait Schmidt dans [Sch67] à partir de la section III, on supposera toujours dans cette thèse que $d+e \leq n$, avec d la dimension du sous-espace approché et e la dimension des sous-espaces rationnels approchants.

Définition 1.2 Un sous-espace vectoriel B de \mathbb{R}^n est dit *rationnel* s'il admet une base formée de vecteurs à coordonnées rationnelles. On note $\mathfrak{R}_n(e)$ l'ensemble des sous-espaces rationnels de \mathbb{R}^n de dimension e .

Comme dans le cas de l'approximation des irrationnels par les rationnels, il est utile de définir une notion d'*irrationalité* pour le sous-espace A qu'on cherche à approcher. Schmidt en donne une dans le corollaire du théorème 12 page 459 de [Sch67].

Définition 1.3 Soient $d, e \in \{1, \dots, n-1\}$ tels que $d+e \leq n$; on pose $t = \min(d, e)$. Soit $j \in \{1, \dots, t\}$. Un sous-espace A de dimension d de \mathbb{R}^n est dit *(e, j)-irrationnel* si pour tout sous-espace rationnel B de dimension e ,

$$\dim(A \cap B) < j.$$

On note $\mathfrak{I}_n(d, e)_j$ l'ensemble des sous-espaces *(e, j)-irrationnels* de dimension d de \mathbb{R}^n .

Remarque 1.4 On utilisera souvent la condition "être *(e, 1)-irrationnel*", précisons donc celle-ci. Un sous-espace A est *(e, 1)-irrationnel* si, et seulement si, il intersecte trivialement tous les sous-espaces vectoriels rationnels de dimension e . Le fait que A soit *(e, 1)-irrationnel* est plus fort que le fait qu'il ne contienne pas de vecteur rationnel. Le sous-espace A est *(e, 1)-irrationnel* si, et seulement si,

$$\forall (\xi_1, \dots, \xi_n) \in A \setminus \{0\}, \quad \dim_{\mathbb{Q}} \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(\xi_1, \dots, \xi_n) \geq e + 1.$$

On a commencé à formuler le problème d'approximation diophantienne de sous-espaces vectoriels en définissant les notions de rationalité et d'irrationalité pour ceux-ci. Il reste à formuler les notions de *proximité* et de *complexité* pour des sous-espaces.

Commençons par la *complexité*, notion définie dans [Sch67] pages 432–433. Pour cela, on a besoin des coordonnées de Plücker (définition 2.4), auxquelles une brève introduction est exposée dans la sous-section 2.1.1, basée sur le livre [CG15] de

P. Caldero et J. Germoni.

Sauf mention explicite du contraire, ici et dans toute la suite, la norme $\|\cdot\|$ désignera la norme euclidienne canonique.

Définition 1.5 Soit $B \in \mathfrak{R}_n(e)$. Posons $N = \binom{n}{e}$ et notons $\Xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$ le vecteur d'un représentant des coordonnées de Plücker de B . Comme B est un sous-espace rationnel, on peut choisir Ξ à coordonnées entières et premières entre elles. On définit alors la *hauteur* de B comme

$$H(B) = \|\Xi\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N \xi_i^2}.$$

Ainsi, de même que la complexité d'un nombre rationnel se mesure grâce à la taille de son dénominateur sous forme irréductible, la complexité d'un sous-espace rationnel se mesure grâce à sa hauteur.

Remarque 1.6 Si $\Xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$ est un représentant quelconque des coordonnées de Plücker, notons \mathfrak{a} l'idéal fractionnaire de \mathbb{Z} engendré par les ξ_i : $\mathfrak{a} = \xi_1\mathbb{Z} + \dots + \xi_N\mathbb{Z}$. L'équation (1) page 432 de [Sch67] permet de généraliser la définition 1.5 : $H(B) = \|\Xi\| / N(\mathfrak{a})$.

Il reste enfin à définir une notion de *proximité* entre deux sous-espaces de \mathbb{R}^n , pas nécessairement de même dimension. On pose de nouveau $t = \min(d, e)$. Cette notion de proximité vient encore de l'article [Sch67], page 443, où Schmidt définit – en s'appuyant notamment sur l'article [Sei55] de J. J. Seidel – t angles entre les sous-espaces A et B de la façon suivante.

On munit \mathbb{R}^n ainsi que la puissance extérieure $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ de leurs normes euclidiennes canoniques respectives. On note pour $X, Y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$\psi(X, Y) = \sin(\widehat{X, Y}) = \frac{\|X \wedge Y\|}{\|X\| \cdot \|Y\|}$$

où $\widehat{X, Y}$ désigne l'angle géométrique entre les vecteurs X et Y , et \wedge le produit extérieur sur \mathbb{R}^n à valeurs dans $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$.

On peut alors définir

$$\psi_1(A, B) = \min_{\substack{X \in A \setminus \{0\} \\ Y \in B \setminus \{0\}}} \psi(X, Y) \tag{1.2}$$

et on note X_1, Y_1 des vecteurs unitaires réalisant ce minimum.

On construit alors d'autres quantités $\psi_2(A, B), \dots, \psi_t(A, B)$ par récurrence sur $j \in \{1, \dots, t\}$. Soit $j \in \{1, \dots, t-1\}$, on suppose que $\psi_1(A, B), \dots, \psi_j(A, B)$ ont été construites, associées à des couples de vecteurs $(X_1, Y_1), \dots, (X_j, Y_j) \in A \times B$. On note A_j

le supplémentaire orthogonal de $\text{Vect}(X_1, \dots, X_j)$ dans A et B_j le supplémentaire orthogonal de $\text{Vect}(Y_1, \dots, Y_j)$ dans B . On définit de la même façon

$$\psi_{j+1}(A, B) = \min_{\substack{X \in A_j \setminus \{0\} \\ Y \in B_j \setminus \{0\}}} \psi(X, Y)$$

et on note X_{j+1}, Y_{j+1} des vecteurs unitaires réalisant ce minimum.

Définition 1.7 Pour $j \in \{1, \dots, t\}$ on pose $\theta_j = \text{Arcsin}(\psi_j(A, B))$ et on appelle θ_j le j -ème angle canonique entre A et B .

Ces angles sont canoniques dans le sens du théorème 1.8 suivant, qui est le théorème 4 page 443 de l'article [Sch67]. Dans ce qui suit, le point \cdot désigne le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^n .

Théorème 1.8 Il existe des bases orthonormales (X_1, \dots, X_d) et (Y_1, \dots, Y_e) de A et B respectivement, et il existe des réels $0 \leq \theta_t \leq \dots \leq \theta_1 \leq 1$ tels que

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, d\} \times \{1, \dots, e\}, \quad X_i \cdot Y_j = \delta_{i,j} \cos \theta_i$$

où δ est le symbole de Kronecker.

De plus, les nombres $\theta_1, \dots, \theta_t$ sont indépendants des bases (X_1, \dots, X_d) et (Y_1, \dots, Y_e) vérifiant cette propriété, et sont invariants sous l'effet d'une isométrie appliquée simultanément à A et à B . Enfin, les réels θ_j sont les angles canoniques de la définition 1.7, et les vecteurs $X_1, \dots, X_t, Y_1, \dots, Y_t$ construits avant la définition 1.7 peuvent être complétés pour former de telles bases orthonormales.

Comme $\psi_j(A, B) = \sin(\theta_j)$, ces bases orthonormales vérifient

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, d\} \times \{1, \dots, e\}, \quad \psi(X_i, Y_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j \\ \psi_j(A, B) & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Remarque 1.9 On utilisera à plusieurs reprises le fait que

$$\dim(A \cap B) \geq j \iff \psi_j(A, B) = 0.$$

Ceci permet de formuler une définition équivalente à la définition 1.3 :

$$A \in \mathfrak{I}_n(d, e)_j \iff \forall B \in \mathfrak{R}_n(e), \quad \psi_j(A, B) \neq 0.$$

Avec les définitions 1.2, 1.3, 1.5 et avec la définition des ψ_j page 14, il est désormais possible d'énoncer un problème analogue à l'inéquation (1.1) en approximation diophantienne classique, mais cette fois-ci avec des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n . C'est ce qui est fait page 459 de [Sch67].

Soient $n \geq 2$ et $d, e \in \{1, \dots, n-1\}$ des entiers tels que $d+e \leq n$, soit $j \in \{1, \dots, \min(d, e)\}$. Soit $A \in \mathfrak{I}_n(d, e)_j$ un sous-espace (e, j) -irrationnel de \mathbb{R}^n . On cherche les réels $\beta > 0$ tels qu'il existe une infinité de sous-espaces rationnels $B \in \mathfrak{R}_n(e)$ tels que

$$\psi_j(A, B) \leq \frac{1}{H(B)^\beta}. \quad (1.3)$$

On peut alors observer la similarité entre les inéquations (1.1) et (1.3).

Définissons ensuite deux quantités importantes.

Notation 1.10 Soit $A \in \mathfrak{I}_n(d, e)_j$. Notons $\mu_n(A|e)_j$ la borne supérieure de l'ensemble des $\beta > 0$ tels que l'inéquation (1.3) soit vérifiée pour une infinité de $B \in \mathfrak{X}_n(e)$; si cet ensemble n'est pas majoré, on pose $\mu_n(A|e)_j = +\infty$.

Notons aussi

$$\mathring{\mu}_n(d|e)_j = \inf_{A \in \mathfrak{I}_n(d, e)_j} \mu_n(A|e)_j.$$

Ainsi, on peut formuler trois problèmes :

Problème 1.11 Pour $A \in \mathfrak{I}_n(d, e)_j$, déterminer $\mu_n(A|e)_j$ en fonction de A et (n, e, j) .

Problème 1.12 Déterminer $\mathring{\mu}_n(d|e)_j$ en fonction de (n, d, e, j) .

Problème 1.13 Déterminer l'ensemble $\mu_n(\mathfrak{I}_n(d, e)_j|e)_j$ en fonction de (n, d, e, j) , *i.e.* l'ensemble des valeurs prises par $\mu_n(A|e)_j$ lorsque A décrit $\mathfrak{I}_n(d, e)_j$.

Continuons la comparaison avec l'approximation diophantienne rationnelle classique :

- Répondre au problème 1.11 dans le cas de l'approximation diophantienne classique, revient à déterminer l'exposant d'irrationalité d'un irrationnel donné. Ce problème est encore largement ouvert. À titre d'exemple, la recherche de l'exposant d'irrationalité de π est toujours en cours (voir figure 1.1), et de nombreux progrès sont faits régulièrement à ce sujet ; on conjecture que $\mu(\pi) = 2$.
- Répondre au problème 1.12 dans le cas de l'approximation diophantienne classique, revient à déterminer le meilleur exposant d'approximation qui soit valide pour tous les irrationnels. Le théorème de Dirichlet (voir théorème 2.27) répond à cette question : 2 est le meilleur exposant d'approximation qui fonctionne simultanément pour tous les irrationnels, c'est-à-dire qu'on a $\mu(\xi) \geq 2$ pour tout $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ avec égalité pour au moins un ξ .
- Le problème 1.13 dans le cas de l'approximation diophantienne classique revient à déterminer l'ensemble $\{\mu(\xi), \xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$. Grâce à la théorie des fractions continues (voir par exemple [Jar29]), on peut montrer que $\{\mu(\xi), \xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\} = [2, +\infty]$.

1953	K. Mahler [Mah53]	$\mu(\pi) \leq 42$
1974	M. Mignotte [Mig74]	$\mu(\pi) \leq 20.6$
1982	G. V. Chudnovsky [Chu82]	$\mu(\pi) \leq 18.9$
1993	M. Hata [Hat93]	$\mu(\pi) \leq 13.398$
2008	V. K. Salikhov [Sal08]	$\mu(\pi) \leq 7.6063$
2020	W. Zudilin et D. Zeilberger [ZZ20]	$\mu(\pi) \leq 7.10321$

FIGURE 1.1 – Majorations successives de l'exposant d'irrationalité de π

Enfin, on peut conclure cette généralisation en remarquant que le problème de l'approximation d'irrationnels par des rationnels est contenu dans la généralisation donnée avec des sous-espaces vectoriels. En effet, approcher $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ revient dans le langage de l'approximation rationnelle des sous-espaces vectoriels à approcher

$$A_\xi = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \xi \end{pmatrix} \right) \in \mathfrak{I}_2(1, 1)_1$$

par des sous-espaces vectoriels rationnels $B \in \mathfrak{R}_2(1)$. On a

$$\mu_2(A_\xi|1)_1 = \mu(\xi).$$

1.3 Présentation des résultats en direction du problème 1.12

La réponse idéale au problème 1.12 serait d'avoir une formule donnant explicitement la valeur de la quantité $\hat{\mu}_n(d|e)_j$ en fonction de (n, d, e, j) . Cependant cet objectif est encore loin d'être atteint. Cette section présente les différents résultats connus à ce jour apportant des réponses partielles à ce problème. Dans la sous-section 1.3.1, on énonce les résultats initiaux obtenus par Schmidt en 1967, et dans la sous-section 1.3.2 on détaille le cas $\min(d, e) = 1$ à travers les résultats de M. Laurent en 2009. Enfin, on présente dans la sous-section 1.3.3 les résultats récents obtenus par N. Moshchevitin en 2020, et dans la sous-section 1.3.4 ceux obtenus par N. de Saxcé, aussi en 2020.

1.3.1 Les résultats originaux de Schmidt

Exposons ici les résultats généraux obtenus par Schmidt sur $\hat{\mu}_n(d|e)_j$ dans [Sch67].

Dans toute la suite, on fixe $n \geq 2$ et $d, e \in \{1, \dots, n-1\}$ tels que $d+e \leq n$. On note $t = \min(d, e)$.

Le théorème 12 page 459 de l'article [Sch67] fournit une première minoration.

Théorème 1.14 (Schmidt, 1967) On a pour tout $j \in \{1, \dots, t\}$,

$$\dot{\mu}_n(d|e)_j \geq \frac{d(n-j)}{j(n-d)(n-e)},$$

et même mieux dans le cas $j = 1$:

$$\dot{\mu}_n(d|e)_1 \geq \frac{n(n-1)}{(n-d)(n-e)}.$$

Schmidt améliore ce résultat sous une condition dans le théorème 13 page 460 de [Sch67] :

Théorème 1.15 (Schmidt, 1967) Soit $j \in \{1, \dots, t\}$. Si

$$j + n - t \geq j(j + n - d - e), \tag{1.4}$$

alors

$$\dot{\mu}_n(d|e)_j \geq \frac{j + n - t}{j(j + n - d - e)}.$$

Ce théorème est surtout utile lorsque $d + e$ est grand, ce qui permet à la condition (1.4) d'être vérifiée. En effet, si $d + e$ est petit devant n , seul le cas $j = 1$ permet de satisfaire l'inégalité (1.4).

Le théorème 15 page 462 de [Sch67] donne une réponse exacte au problème 1.12 dans certains cas particuliers :

Théorème 1.16 (Schmidt, 1967) Si

$$n \geq t(t + n - d - e), \tag{1.5}$$

alors

$$\dot{\mu}_n(d|e)_t = \frac{n}{t(t + n - d - e)}.$$

On peut remarquer que la condition (1.5) est toujours vérifiée dans le cas où $t = \min(d, e) = 1$.

Ainsi, Schmidt a donné une réponse complète au problème 1.12 dans le cas où on cherche :

- soit à approcher une droite par des sous-espaces rationnels,
- soit à approcher un sous-espace par des droites rationnelles.

Ce cas a continué à être étudié depuis, et une présentation en est faite dans la sous-section 1.3.2 ci-dessous.

Schmidt fournit aussi page 465 de [Sch67], sans aller jusqu'à l'optimalité, une majoration dans le cas général :

Théorème 1.17 (Schmidt, 1967) Soit $j \in \{1, \dots, t\}$. On a

$$\dot{\mu}_n(d|e)_j \leq \frac{1}{j} \left\lceil \frac{e(n-e)+1}{n+1-d-e} \right\rceil.$$

Ces différentes bornes permettent d'obtenir des encadrements de $\dot{\mu}_n(d|e)_j$ en fonction de (n, d, e, j) . À titre d'exemple et d'illustration, les différents encadrements connus de $\dot{\mu}_n(d|e)_j$ pour $n \in \{2, \dots, 6\}$ sont exposés dans la section 1.5 ci-dessous.

Le premier cas encore ouvert est le cas

$$(n, d, e, j) = (4, 2, 2, 1).$$

Les résultats de Schmidt ne donnent que l'encadrement

$$3 \leq \dot{\mu}_4(2|2)_1 \leq 5,$$

qui a été amélioré par Moshchevitin – voir sous-section 1.3.3 – en

$$3 \leq \dot{\mu}_4(2|2)_1 \leq 4$$

et sera l'objet du théorème 3.3.

1.3.2 Le cas $\min(d, e) = 1$

A. Khintchine et A. V. Groshev (voir [Gro38]) ont travaillé sur l'approximation d'un sous-espace vectoriel par une droite, mais d'après l'article [Lau09] de Laurent, c'est surtout Schmidt qui fut le premier à étudier les exposants $\mu_n(L|e)_1$ où L est une droite rationnelle de \mathbb{R}^n . Schmidt adopte un point de vue plus géométrique que celui de Khintchine et Groshev. Grâce au théorème 1.16, Schmidt a complètement résolu le problème consistant à déterminer $\dot{\mu}_n(1|e)_1$ et $\dot{\mu}_n(d|1)_1$, *i.e.* à approcher des droites ou à approcher par des droites. Cependant d'autres résultats furent apportés sur ces exposants, comme celui du théorème 2 page 3 de l'article [Lau09] de Laurent, énoncé ci-dessous.

Théorème 1.18 (Laurent, 2009) Soit A une droite $(n-1, 1)$ -irrationnelle de \mathbb{R}^n . Alors on a un résultat de Going-up :

$$\forall e \in \{1, \dots, n-2\}, \quad \mu_n(A|e+1)_1 \geq \frac{(n-e)\mu_n(A|e)_1}{n-e-1},$$

et un résultat de Going-down :

$$\forall e \in \{2, \dots, n-1\}, \quad \mu_n(A|e-1)_1 \geq \frac{e\mu_n(A|e)_1}{\mu_n(A|e)_1 + e - 1}.$$

La première partie de ce théorème améliore le théorème 11 du Going-up de Schmidt ([Sch67] page 457) dans le cas particulier dans lequel se place Laurent. Dans la seconde, il retrouve la même minoration que le théorème 2.30.

Laurent déduit du théorème 1.18 le corollaire suivant ([Lau09] page 4), qui a un triple intérêt :

- il retrouve la minoration de Schmidt du théorème 1.15 dans le cas $d = 1$,
- il donne l'exposant générique,
- il donne le spectre de l'exposant dans le cas particulier où A est une droite $(n - 1, 1)$ -irrationnelle, répondant au problème 1.13 dans ce cas.

Corollaire 1.19 (Laurent) Soit A une droite $(n - 1, 1)$ -irrationnelle de \mathbb{R}^n . On a

$$\forall e \in \{1, \dots, n - 1\}, \quad \mu_n(A|e)_1 \geq \frac{n}{n - e}$$

avec égalité pour presque tout A par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n . De plus, l'ensemble $\mu_n(\mathfrak{J}_n(1, n - 1)_1|e)_1$ est entièrement déterminé : pour tout $e \in \{1, \dots, n - 1\}$, on a

$$\left\{ \mu_n(A|e)_1, A \in \mathfrak{J}_n(1, n - 1)_1 \right\} = \left[\frac{n}{n - e}, +\infty \right).$$

Cet article [Lau09] soulève aussi le problème de déterminer l'ensemble

$$\left\{ (\mu_n(A|1)_1, \dots, \mu_n(A|n - 1)_1), A \in \mathfrak{J}_n(1, n - 1)_1 \right\},$$

problème qui a connu des avancées grâce à A. Marnat en 2018 (voir [Mar18]).

Enfin, pour approfondir le cas $\min(d, e) = 1$, on peut consulter à ce sujet [BL05a], [BL05b] ou [BL10].

1.3.3 Les résultats de Moshchevitin

Schmidt a montré que $\mu_4(2|2)_1 \in [3, 5]$. Ce résultat a été amélioré en 2020 : Moshchevitin montre dans [Mos20] le théorème 1.20 ci-dessous.

Ici, Moshchevitin construit une mesure sur la grassmannienne $\text{Gr}_{2,4}$ en la plongeant dans \mathbb{R}^4 grâce à un système de six cartes affines, puis en tirant en arrière la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^4 ; c'est ce qui lui permet de parler de *presque tout* sous-espace vectoriel.

Théorème 1.20 (Moshchevitin, 2020) Soit $\omega: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une application décroissante telle que

$$\sum_{j=1}^{\infty} j\omega(\sqrt{j}) < \infty.$$

Pour presque tout $A \in \mathfrak{J}_4(2, 2)_1$, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\forall B \in \mathfrak{A}_4(2), \quad \psi_1(A, B) \geq c\omega(H(B)).$$

Du théorème 1.20 (appliqué avec $\omega(t) = t^{-4-\varepsilon}$ pour $\varepsilon > 0$) découle notamment l'existence d'un sous-espace $A \in \mathfrak{J}_4(2, 2)_1$ approché à l'exposant au plus 4, d'où le corollaire suivant :

Corollaire 1.21 (Moshchevitin, 2020) On a

$$\dot{\mu}_4(2|2)_1 \leq 4,$$

et même pour presque tout $A \in \mathfrak{J}_4(2, 2)_1$,

$$\mu_4(A|2)_1 \leq 4.$$

Ainsi, Moshchevitin montre que l'exposant générique relatif au premier angle pour deux plans dans \mathbb{R}^4 se situe dans $[3, 4]$. Il énonce de plus une généralisation du théorème 1.20, en affirmant que la preuve est similaire à celle du théorème 1.20.

Théorème 1.22 (Moshchevitin, 2020) Soient $n = 2d$, et $\omega: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une application décroissante telle que

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^{d-1} \omega(\sqrt{j}) < \infty.$$

Pour presque tout $A \in \mathfrak{J}_n(d, d)_1$, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\forall B \in \mathfrak{R}_n(d), \quad \psi_1(A, B) \geq c\omega(H(B)).$$

Comme pour le corollaire 1.21, le théorème 1.22 donne un sous-espace $A \in \mathfrak{J}_n(d, d)_1$ approché à l'exposant au plus $2d$, ce qui implique le corollaire suivant :

Corollaire 1.23 (Moshchevitin, 2020) Soit $n = 2d$, on a

$$\dot{\mu}_n(d|d)_1 \leq 2d,$$

et même pour presque tout $A \in \mathfrak{J}_n(d, d)_1$,

$$\mu_n(A|d)_1 \leq 2d.$$

Ceci améliore considérablement la majoration de Schmidt, car le théorème 1.17 avec $n = 2d$ donne

$$\dot{\mu}_n(d|d)_1 \leq d^2 + 1.$$

À titre d'exemple, le corollaire 1.23 montre que

$$\dot{\mu}_6(3|3)_1 \leq 6,$$

ce qui améliore la majoration de Schmidt $\dot{\mu}_6(3|3)_1 \leq 10$.

1.3.4 Les résultats de Saxcé

Soient $n \geq 2$ et $d \in \{1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor\}$. D'après le théorème 1.14, on a

$$\dot{\mu}_n(d|d)_d \geq \frac{1}{n-d}. \quad (1.6)$$

Dans [dS20], Saxcé donne dans le théorème 9.3.2 page 105 l'exposant générique relatif au d -ième angle pour deux sous-espaces vectoriels de dimension d de \mathbb{R}^n . Cet exposant générique est supérieur à la minoration (1.6) de Schmidt. La classe de mesure que Saxcé utilise est la classe de la mesure de Lebesgue sur les points réels de la grassmannienne $\text{Gr}(d, n)$, c'est ce qui lui permet de parler de *presque tout* $A \in \text{Gr}(d, n)$.

Théorème 1.24 (Saxcé, 2020) Soient A un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n de dimension d et $\omega: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction décroissante. On considère pour $B \in \mathfrak{R}_n(d)$ l'inégalité

$$\psi_d(A, B) \leq \omega(H(B))H(B)^{-n/(d(n-d))}. \quad (1.7)$$

- Si $\int_1^\infty t^{-1}\omega(t)^{d(n-d)}dt = +\infty$, alors pour presque tout $A \in \text{Gr}(d, n)$ l'inégalité (1.7) admet une infinité de solutions $B \in \mathfrak{R}_n(d)$.
- Si $\int_1^\infty t^{-1}\omega(t)^{d(n-d)}dt < \infty$, alors pour presque tout $A \in \text{Gr}(d, n)$ l'inégalité (1.7) n'admet qu'un nombre fini de solutions $B \in \mathfrak{R}_n(d)$.

Comme $\mathfrak{I}_n(d, d)_d = X(\mathbb{R}) \setminus X(\mathbb{Q})$ avec $X = \text{Gr}(d, n)$, on déduit du théorème 1.24 le corollaire suivant.

Corollaire 1.25 (Saxcé, 2020) Pour presque tout $A \in \mathfrak{I}_n(d, d)_d$, on a

$$\mu_n(A|d)_d = \frac{n}{d(n-d)}.$$

Corollaire 1.26 (Saxcé, 2020) On a

$$\dot{\mu}_n(d|d)_d \leq \frac{n}{d(n-d)}.$$

Saxcé estime possible ([dS20] page 106) qu'on ait égalité dans ce corollaire.

Enfin, Saxcé s'intéresse au cas des sous-espaces définis par des équations à coefficients algébriques.

Théorème 1.27 (Saxcé, 2020) Soit $A \in \mathfrak{I}_n(d, d)_d$ un sous-espace vectoriel défini par des équations à coefficients algébriques. Alors

$$\mu_n(A|d)_d \geq \frac{n}{d(n-d)}. \quad (1.8)$$

Remarque 1.28 Dans [dS20] page 107, Saxcé donne une condition nécessaire et suffisante pour que la minoration (1.8) soit une égalité, ce qui apporte une réponse partielle au problème 1.11.

1.4 Plan de la thèse et résultats principaux

On termine cette introduction par un bref résumé du contenu de chaque chapitre. On énonce aussi les théorèmes principaux démontrés dans cette thèse.

Chapitre 2

De nombreux outils qui seront utiles pour la suite sont regroupés dans ce chapitre. On commence par développer dans la sous-section 2.1.1 ce que sont les coordonnées de Plücker, qui permettent de travailler avec la hauteur d'un sous-espace rationnel.

On donne ensuite plusieurs outils sur la hauteur dans les sous-sections 2.1.2 et 2.1.3, et sur la proximité dans la section 2.2.

Enfin, on énonce deux théorèmes d'approximation simultanée dans la section 2.3, et les théorèmes du Going-up et du Going-down dans la section 2.4.

Chapitre 3

Différents cas particuliers sont étudiés dans ce chapitre. On commence par énoncer quelques outils dans la section 3.1, puis on traite deux cas particuliers dans \mathbb{R}^4 et \mathbb{R}^5 , respectivement dans les sections 3.2 et 3.3.

Le cas le plus simple encore ouvert est la détermination de $\dot{\mu}_4(2|2)_1$, quantité encadrée entre 3 et 5 par Schmidt en 1967, puis entre 3 et 4 par Moshchevitin en 2020. Le théorème 3.3 la détermine exactement, grâce à un plan explicite de $\mathfrak{I}_4(2,2)_1$ particulièrement mal approché par les plans rationnels. C'est ainsi qu'on obtient le :

Théorème 3.3 On a

$$\dot{\mu}_4(2|2)_1 = 3.$$

Par ailleurs, en considérant un élément explicite de $\mathfrak{I}_5(3,2)_1$ mal approché par les plans rationnels, on obtient une amélioration de l'encadrement connu de $\dot{\mu}_5(3|2)_1$ dû à Schmidt. Cette quantité est encadrée par 4 et 7 d'après les théorèmes 1.15 et 1.17 respectivement.

Théorème 3.9 On a

$$\dot{\mu}_5(3|2)_1 \leq 6.$$

Dans la section 3.5, on déduit un nouveau majorant de $\dot{\mu}_n(d|d-1)_1$ comme corollaire du théorème 1.22 : pour $d \geq 2$ un entier et $n = 2d$, on a

$$\dot{\mu}_n(d|d-1)_1 \leq \frac{2d^2}{d+1}.$$

Chapitre 4

Des résultats de reconstruction sur le comportement de la proximité et de la hauteur par somme directe sont obtenus dans la sous-section 4.1.2. Grâce à ces résultats de reconstruction, on améliore asymptotiquement le minorant connu de $\dot{\mu}_n(d|e)_j$ dans le théorème 4.1. Dans le cas particulier où $d = e = j$, on obtient alors le corollaire suivant.

Corollaire 4.3 Soient $n \geq 4$ et $d \leq n/2$ un entier. On a

$$\dot{\mu}_n(d|d)_d \geq \frac{2dn - d^2 + d + 2}{2d^2n - d^3 + d^2}.$$

En combinant ce corollaire avec le corollaire 1.26 de Saxcé, on obtient pour $n \geq 2d$ l'encadrement

$$\frac{2dn - d^2 + d + 2}{2d^2n - d^3 + d^2} \leq \dot{\mu}_n(d|d)_d \leq \frac{n}{d(n-d)},$$

ce qui permet d'en déduire le résultat suivant.

Corollaire 4.4 On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \dot{\mu}_n(d|d)_d = \frac{1}{d}.$$

Chapitre 5

Dans ce chapitre, on démontre le théorème 5.1, qui permet de baisser la dimension de l'espace ambiant lorsque le sous-espace vectoriel approché est inclus dans un sous-espace rationnel :

Théorème 5.1 Soient $n \geq 2$ et $k \in \{2, \dots, n\}$. Soient $d, e \in \{1, \dots, k-1\}$ tels que $d + e \leq k$, et $j \in \{1, \dots, \min(d, e)\}$. Soit A un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n de dimension d tel qu'il existe un sous-espace vectoriel rationnel $F \in \mathfrak{R}_n(k)$ vérifiant $A \subset F$.

Notons φ un isomorphisme rationnel de F dans \mathbb{R}^k et $\tilde{A} = \varphi(A)$, qui est un sous-espace vectoriel de dimension d de \mathbb{R}^k .

Supposons que pour tout sous-espace rationnel B' de F de dimension e , on a

$$\dim(A \cap B') < j. \tag{1.9}$$

Alors $A \in \mathfrak{I}_n(d, e)_j$, $\tilde{A} \in \mathfrak{I}_k(d, e)_j$ et

$$\mu_n(A|e)_j = \mu_k(\tilde{A}|e)_j.$$

On déduit ensuite de ce théorème l'amélioration de quelques majorations connues de $\dot{\mu}_n(d|e)_j$ dans la section 5.2. On obtient que

$$\dot{\mu}_5(2|2)_1 \leq 3,$$

ce qui améliore le majorant connu $\dot{\mu}_5(2|2)_1 \leq 4$ donné par le théorème 1.17. On déduit aussi que pour tout $d \geq 2$ et pour tout $n \geq 2d$, on a

$$\dot{\mu}_n(d|d)_1 \leq 2d$$

et

$$\dot{\mu}_n(d|d-1)_1 \leq \frac{2d^2}{d+1},$$

ce qui améliore des majorations dans des cas où n est proche de $2d$: $\dot{\mu}_7(3|3)_1 \leq 7$ devient $\dot{\mu}_7(3|3)_1 \leq 6$ et $\dot{\mu}_9(4|3)_1 \leq 7$ devient $\dot{\mu}_9(4|3)_1 \leq 32/5 = 6.4$ par exemple.

Chapitre 6

L'objectif de ce chapitre est de montrer le résultat suivant sur le spectre de l'exposant relatif au ℓ -ième angle entre deux sous-espaces vectoriels de dimension ℓ :

Théorème 6.1 Soient $n \geq 2$ et $\ell \in \{1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor\}$.

Alors

$$\left[1 + \frac{1}{2\ell} + \sqrt{1 + \frac{1}{4\ell^2}}, +\infty \right) \subset \left\{ \mu_n(A|\ell)_\ell, A \in \mathfrak{J}_n(\ell, \ell)_\ell \right\}.$$

Pour ce faire, on construit explicitement un sous-espace vectoriel d'exposant prescrit dans la section 6.1.

1.5 Les résultats connus jusqu'en dimension 6

On expose ici les premières valeurs de $\dot{\mu}_n(d|e)_j$ pour $n \in \{2, \dots, 6\}$, ce qui permet d'avoir une idée de l'ordre de grandeur de $\dot{\mu}_n(d|e)_j$. Ces valeurs sont présentées dans les tableaux 1.2, 1.3, 1.4, 1.5 et 1.6 ci-dessous. On se place dans les cas où $d+e \leq n$, avec $d = \dim A$ et $e = \dim B$; les étoiles correspondent aux cas $d+e > n$. Pour $n \in \{2, \dots, 6\}$, les encadrements connus sont principalement dus à Schmidt (théorèmes 1.14, 1.15, 1.16 et 1.17). Les majorations $\dot{\mu}_4(2|2)_1 \leq 4$ et $\dot{\mu}_6(3|3)_1 \leq 6$ sont dues à Moshchevitin (corollaires 1.21 et 1.23 respectivement), le théorème 1.17 de Schmidt donnant seulement $\dot{\mu}_4(2|2)_1 \leq 5$ et $\dot{\mu}_6(3|3)_1 \leq 10$. Les majorations $\dot{\mu}_5(2|2)_2 \leq 5/6$, $\dot{\mu}_6(2|2)_2 \leq 3/4$ et $\dot{\mu}_6(3|3)_3 \leq 2/3$ sont dues à Saxcé (corollaire 1.26), le théorème 1.17 donnant seulement $\dot{\mu}_5(2|2)_2 \leq 2$, $\dot{\mu}_6(2|2)_2 \leq 3/2$ et $\dot{\mu}_6(3|3)_3 \leq 10/3$.

Les lignes en gras correspondent aux améliorations présentées dans cette thèse des encadrements connus jusqu'ici de $\dot{\mu}_n(d|e)_j$.

Remarquons que Schmidt émet l'hypothèse dans [Sch67] page 471 que $\dot{\mu}_n(d|e)_j$ est une fonction symétrique en d et e , sans aller jusqu'à conjecturer ce résultat.

\mathbb{R}^2	$\dim A = 1$
$\dim B = 1$	$\dot{\mu}_2(1 1)_1 = 2$

FIGURE 1.2 – Le cas de \mathbb{R}^2

\mathbb{R}^3	$\dim A = 1$	$\dim A = 2$
$\dim B = 1$	$\dot{\mu}_3(1 1)_1 = \frac{3}{2}$	$\dot{\mu}_3(2 1)_1 = 3$
$\dim B = 2$	$\dot{\mu}_3(1 2)_1 = 3$	★

FIGURE 1.3 – Le cas de \mathbb{R}^3

\mathbb{R}^4	$\dim A = 1$	$\dim A = 2$	$\dim A = 3$
$\dim B = 1$	$\dot{\mu}_4(1 1)_1 = \frac{4}{3}$	$\dot{\mu}_4(2 1)_1 = 2$	$\dot{\mu}_4(3 1)_1 = 4$
$\dim B = 2$	$\dot{\mu}_4(1 2)_1 = 2$	$3 \leq \dot{\mu}_4(2 2)_1 \leq 4$ $\dot{\mu}_4(\mathbf{2 2})_1 = \mathbf{3}$ $\dot{\mu}_4(2 2)_2 = 1$	★
$\dim B = 3$	$\dot{\mu}_4(1 3)_1 = 4$	★	★

FIGURE 1.4 – Le cas de \mathbb{R}^4

Le résultat $\dot{\mu}_4(2|2)_1 = 3$ est celui du théorème 3.3.

\mathbb{R}^5	$\dim A = 1$	$\dim A = 2$	$\dim A = 3$	$\dim A = 4$
$\dim B = 1$	$\dot{\mu}_5(1 1)_1 = \frac{5}{4}$	$\dot{\mu}_5(2 1)_1 = \frac{5}{3}$	$\dot{\mu}_5(3 1)_1 = \frac{5}{2}$	$\dot{\mu}_5(4 1)_1 = 5$
$\dim B = 2$	$\dot{\mu}_5(1 2)_1 = \frac{5}{3}$	$\frac{20}{9} \leq \dot{\mu}_5(2 2)_1 \leq 4$ $\dot{\mu}_5(\mathbf{2 2})_1 \leq \mathbf{3}$ $\frac{1}{3} \leq \dot{\mu}_5(2 2)_2 \leq 5/6$ $\frac{5}{9} \leq \dot{\mu}_5(\mathbf{2 2})_2$	$4 \leq \dot{\mu}_5(3 2)_1 \leq 7$ $\dot{\mu}_5(\mathbf{3 2})_1 \leq \mathbf{6}$ $\dot{\mu}_5(3 2)_2 = \frac{5}{4}$	★
$\dim B = 3$	$\dot{\mu}_5(1 3)_1 = \frac{5}{2}$	$4 \leq \dot{\mu}_5(2 3)_1 \leq 7$ $\dot{\mu}_5(2 3)_2 = \frac{5}{4}$	★	★
$\dim B = 4$	$\dot{\mu}_5(1 4)_1 = 5$	★	★	★

FIGURE 1.5 – Le cas de \mathbb{R}^5

La majoration $\dot{\mu}_5(2|2)_1 \leq 3$ est celle de la proposition 5.6 (proposition qui combine la

proposition 3.5 et le théorème 5.1), la majoration $\dot{\mu}_5(3|2)_1 \leq 6$ provient du théorème 3.9 et la minoration $\dot{\mu}_5(2|2)_2 \geq 5/9$ se déduit du théorème 4.1.

\mathbb{R}^6	dim $A = 1$	dim $A = 2$	dim $A = 3$	dim $A = 4$	dim $A = 5$
dim $B = 1$	$\dot{\mu}_6(1 1)_1 = \frac{6}{5}$	$\dot{\mu}_6(2 1)_1 = \frac{3}{2}$	$\dot{\mu}_6(3 1)_1 = 2$	$\dot{\mu}_6(4 1)_1 = 3$	$\dot{\mu}_6(5 1)_1 = 6$
dim $B = 2$	$\dot{\mu}_6(1 2)_1 = \frac{3}{2}$	$\frac{15}{8} \leq \dot{\mu}_6(2 2)_1 \leq 3$ $\frac{1}{4} \leq \dot{\mu}_6(2 2)_2 \leq \frac{3}{4}$ $\frac{6}{11} \leq \dot{\mu}_6(\mathbf{2 2})_2$	$\frac{5}{2} \leq \dot{\mu}_6(3 2)_1 \leq 5$ $\dot{\mu}_6(\mathbf{3 2})_1 \leq \frac{9}{2}$ $\dot{\mu}_6(3 2)_2 = 1$	$5 \leq \dot{\mu}_6(4 2)_1 \leq 9$ $\dot{\mu}_6(4 2)_2 = \frac{3}{2}$	*
dim $B = 3$	$\dot{\mu}_6(1 3)_1 = 2$	$\frac{5}{2} \leq \dot{\mu}_6(2 3)_1 \leq 5$ $\dot{\mu}_6(2 3)_2 = 1$	$4 \leq \dot{\mu}_6(3 3)_1 \leq 6$ $\frac{5}{4} \leq \dot{\mu}_6(3 3)_2 \leq 5$ $\frac{1}{3} \leq \dot{\mu}_6(3 3)_3 \leq \frac{2}{3}$ $\frac{16}{45} \leq \dot{\mu}_6(\mathbf{3 3})_3$	*	*
dim $B = 4$	$\dot{\mu}_6(1 4)_1 = 3$	$5 \leq \dot{\mu}_6(2 4)_1 \leq 9$ $\dot{\mu}_6(2 4)_2 = \frac{3}{2}$	*	*	*
dim $B = 5$	$\dot{\mu}_6(1 5)_1 = 6$	*	*	*	*

FIGURE 1.6 – Le cas de \mathbb{R}^6

Les minorations $\dot{\mu}_6(2|2)_2 \geq 6/11$ et $\dot{\mu}_6(3|3)_3 \geq 16/45$ sont des cas particuliers du théorème 4.1. La majoration $\dot{\mu}_6(3|2)_1 \leq 9/2$ se déduit du théorème 3.15 qui découle des résultats de Moshchevitin (théorème 1.22).

1.6 Une conjecture sur $\dot{\mu}_n(d|e)_e$

Commençons par mentionner le théorème 8 page 449 de [Sch67] :

Théorème 1.31 Soient $n \geq 2$ et $d \in \{1, \dots, n-1\}$, posons $t = \min(d, n-d)$; soit $A \in \mathfrak{I}_n(d, t)_t$. Il existe des sous-espaces $B_1 \subset \dots \subset B_t$ de $\mathfrak{R}_n(1), \dots, \mathfrak{R}_n(t)$ respectivement, tels que pour tout $j \in \{1, \dots, t\}$, on a

$$H(B_1)\psi_j(A, B_j) \leq \frac{c}{H(B_j)^{d/(j(n-d))}}$$

où $c > 0$ ne dépend uniquement de n , d et e .

On peut alors remarquer – comme le fait Schmidt en conclusion de [Sch67] – qu’un sous-espace mal approché par les droites rationnelles est très bien approché par des sous-espaces rationnels de dimension supérieure. Explicitons ce que donne l’approche qu’il propose.

Soient $n \geq 2$, $d, e \in \{1, \dots, n-1\}$ des entiers tels que $e \leq d \leq n-e$, et $A \in \mathfrak{I}_n(d, e)_e$. Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, il n’existe qu’un nombre fini droites rationnelles B telles que

$$\psi_1(A, B) \leq \frac{1}{H(B)^{n/(n-d)+\varepsilon}}.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante $c_1 > 0$ dépendant uniquement de A , de n et de ε telle que

$$\forall B \in \mathfrak{R}_n(1), \quad \psi_1(A, B) \geq \frac{c_1}{H(B)^{n/(n-d)+\varepsilon}}$$

soit

$$\forall B \in \mathfrak{R}_n(1), \quad \frac{1}{H(B)} \leq c_2 \psi_1(A, B)^{(n-d)/(n+\varepsilon(n-d))}$$

avec $c_2 > 0$ ne dépendant que de A , de n et de ε . Le théorème 1.31 donne alors une infinité de sous-espaces $B_1 \subset \cdots \subset B_e$ de $\mathfrak{R}_n(1), \dots, \mathfrak{R}_n(e)$ respectivement, tels que

$$\psi_e(A, B_e) \leq \frac{1}{H(B_1)} \cdot \frac{c}{H(B_e)^{d/(e(n-d))}} \leq \frac{c_3 \psi_1(A, B_1)^{(n-d)/(n+\varepsilon(n-d))}}{H(B_e)^{d/(e(n-d))}}$$

avec $c_3 > 0$ ne dépendant que de A , de n , de e et de ε . Or d'après le lemme 2.24, on a

$$\psi_1(A, B_1) \leq \psi_e(A, B_e),$$

donc

$$\psi_e(A, B_e) \leq c_4 H(B_e)^{-\frac{d}{e(n-d)} \cdot \frac{n+\varepsilon(n-d)}{d+\varepsilon(n-d)}}$$

avec $c_4 > 0$ ne dépendant que de A , de n , de e et de ε . Finalement, en faisant tendre ε vers 0, on obtient

$$\mu_n(A|e)_e \geq \frac{n}{e(n-d)}.$$

En comparant ce résultat avec le corollaire 1.26 qui donne $\dot{\mu}_n(d|d)_d \leq n/(d(n-d))$, on émet la conjecture suivante qui rejoint, lorsque $d = e$, la possibilité évoquée par Saxcé ([dS20] page 106) qu'on ait égalité dans le corollaire 1.26. De plus, d'après le théorème 1.16, cette conjecture est vraie si $n \geq e(n-d)$.

Conjecture 1.32 Soient $n \geq 2$, $d, e \in \{1, \dots, n-1\}$ des entiers tels que $e \leq d \leq n-e$. On a

$$\dot{\mu}_n(d|e)_e = \frac{n}{e(n-d)}.$$

On remarque aussi que le corollaire 1.25 donne que $\mu_n(A|d)_d = n/(d(n-d))$ pour presque tout $A \in \mathfrak{I}_n(d, d)_d$.

Enfin, Schmidt émet l'hypothèse que $\dot{\mu}_n(d|e)_j$ soit une fonction symétrique de d et e ([Sch67] page 471). Dans ce cas, la conjecture 1.32 s'étend au cas $e > d$ et devient

$$\dot{\mu}_n(d|e)_{\min(d,e)} = \frac{n}{\min(d,e)(n-\max(d,e))}.$$

Chapitre 2

Des outils

Dans ce chapitre, après avoir développé les coordonnées de Plücker dans la sous-section 2.1.1, qui permettront d'énoncer des résultats utiles pour travailler avec la hauteur d'un sous-espace rationnel, il s'agira de donner quelques résultats sur la hauteur (sous-sections 2.1.2 et 2.1.3) et sur la proximité (section 2.2).

On énonce aussi quelques théorèmes connus, d'approximation simultanée et de Going-up/Going-down dans les sections 2.3 et 2.4.

2.1 Outils liés à la hauteur

2.1.1 Les coordonnées de Plücker

Les coordonnées de Plücker sont au cœur de la définition 1.5 de la hauteur d'un sous-espace rationnel. Cette sous-section rappelle quelques résultats sur ces coordonnées, en s'appuyant sur le chapitre I du livre [CG15] de Caldero et Germoni, dans lequel tous les résultats énoncés ici sont démontrés.

Soient $m, n, r \in \mathbb{N}^*$ tels que $r \leq \min(m, n)$; on note $\Lambda(r, n)$ l'ensemble des parties à r éléments de $\{1, \dots, n\}$. Pour $I \in \Lambda(r, m)$, $J \in \Lambda(r, n)$ et A une matrice de taille $m \times n$, on note $\Delta_{I,J}(A)$ le mineur correspondant aux lignes de A indexées par I , et aux colonnes de A indexées par J .

Si I et J sont deux parties de $\{1, \dots, n\}$, on définit $\iota(I, J)$ le nombre d'inversions de I à J par

$$\iota(I, J) = \text{Card}(\{(i, j) \in I \times J, i > j\}).$$

On note \bar{I} le complémentaire de I dans $\{1, \dots, n\}$, et $\ell(I) = \iota(I, \bar{I})$.

Une formule qui sera utile par la suite est la suivante. Elle généralise le développement par rapport à une ligne ou une colonne du déterminant d'une matrice.

Proposition 2.1 (développement de Laplace) Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $J \in \Lambda(r, n)$. Alors

$$\det(A) = \sum_{I \in \Lambda(r, n)} (-1)^{\ell(I) + \ell(J)} \Delta_{I,J}(A) \Delta_{\bar{I}, \bar{J}}(A).$$

Exemple 2.2 Comme le cas de $A \in M_4(\mathbb{R})$ sera utilisé par la suite, illustrons le développement de Laplace en calculant le déterminant de A par rapport à ses deux premières colonnes ($J = \{1, 2\}$). On a

$$\ell(\{1, 2\}) = \iota(\{1, 2\}, \{3, 4\}) = \text{Card}(\{(i, j) \in \{1, 2\} \times \{3, 4\}, i > j\}) = 0,$$

et de même

$$\ell(\{1, 3\}) = 1, \ell(\{1, 4\}) = 2, \ell(\{2, 3\}) = 2, \ell(\{2, 4\}) = 3 \text{ et } \ell(\{3, 4\}) = 4,$$

donc

$$\begin{aligned} \det(A) = & \Delta_{\{1,2\},\{1,2\}}(A)\Delta_{\{3,4\},\{3,4\}}(A) - \Delta_{\{1,3\},\{1,2\}}(A)\Delta_{\{2,4\},\{3,4\}}(A) \\ & + \Delta_{\{1,4\},\{1,2\}}(A)\Delta_{\{2,3\},\{3,4\}}(A) + \Delta_{\{2,3\},\{1,2\}}(A)\Delta_{\{1,4\},\{3,4\}}(A) \\ & - \Delta_{\{2,4\},\{1,2\}}(A)\Delta_{\{1,3\},\{3,4\}}(A) + \Delta_{\{3,4\},\{1,2\}}(A)\Delta_{\{1,2\},\{3,4\}}(A). \end{aligned}$$

Soient $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ et $r \leq \min(n, m)$. On utilise l'ordre lexicographique sur $\Lambda(r, n)$ et $\Lambda(r, m)$, ce qui permet d'identifier $\Lambda(r, n)$ à $\{1, \dots, N\}$ et $\Lambda^r(\mathbb{R}^n)$ à \mathbb{R}^N , où $N = \binom{n}{r}$. On définit la r -ième puissance extérieure de A , comme la matrice dont les coefficients sont les mineurs extraits de taille $r \times r$, *i.e.*

$$\Lambda^r(A) = (\Delta_{I,J}(A))_{I \in \Lambda(r,n), J \in \Lambda(r,m)}.$$

Ces quelques notations permettent d'arriver au théorème du plongement de Plücker. L'idée du plongement de Plücker est de voir les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n de dimension d , comme des points d'un espace projectif. Autrement dit, de voir tous les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n comme des droites d'un espace plus grand.

On note $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des droites vectorielles de \mathbb{R}^n et $\text{Gr}_{r,n}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n de dimension r , qui s'appelle la grassmannienne.

Théorème 2.3 (plongement de Plücker) Soient $n \geq 2$ un entier et $r \in \{1, \dots, n-1\}$.

Soient F un sous-espace vectoriel de dimension r de \mathbb{R}^n et $A_F \in M_{n,r}(\mathbb{R})$ la matrice d'une base de F dans la base canonique de \mathbb{R}^n .

Alors la droite engendrée par $\Lambda^r(A_F)$ ne dépend que de F . On note $[\Lambda^r(A_F)]$ le point correspondant dans l'espace projectif, et $N = \binom{n}{r}$. On peut donc définir une application $\psi_{r,n}$ par

$$\begin{aligned} \psi_{r,n}: \text{Gr}_{r,n} & \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}^N) \\ F & \longmapsto [\Lambda^r(A_F)]. \end{aligned}$$

De plus, cette application – appelée *plongement de Plücker de $\text{Gr}_{r,n}$* – est injective.

Arrive alors la définition clef de ce paragraphe.

Définition 2.4 Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n de dimension r ; on note A_F la matrice d'une base de F dans la base canonique. Les $\binom{n}{r}$ coordonnées du vecteur $\Lambda^r(A_F)$ sont appelées les *coordonnées de Plücker* de F .

Dans toute la suite, les coordonnées de Plücker (qui sont les mineurs de taille maximale de A_F) seront donc ordonnées par l'ordre lexicographique.

Remarque 2.5 Le théorème 2.3 assure que deux sous-espaces vectoriels différents auront des coordonnées de Plücker associées non proportionnelles, et que les coordonnées de Plücker d'un sous-espace donné sont uniques à multiplication par un scalaire près. Ce sont ces deux points cruciaux qui donnent tout leur intérêt aux coordonnées de Plücker.

Le théorème 2.3 construit un plongement $\psi_{r,n}$ de $\text{Gr}_{r,n}$ dans $\mathbb{P}(\mathbb{R}^N)$, mais une question reste en suspens : quels sont les points de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^N)$ qui ont un antécédent par $\psi_{r,n}$? Autrement dit, quels points de l'espace projectif sur \mathbb{R}^N correspondent effectivement à un sous-espace vectoriel ? Cette question est résolue dans le théorème suivant :

Théorème 2.6 (relations de Plücker) Soient $n \geq 2$ et $r \in \{1, \dots, n-1\}$; posons $N = \binom{n}{r}$. Soit $\psi_{r,n} : \text{Gr}_{r,n} \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}^N)$ le plongement de Plücker de $\text{Gr}_{r,n}$. Alors l'image de $\psi_{r,n}$ est l'ensemble des points $v = (v_K)_{K \in \Lambda(r,n)}$ de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^N)$ vérifiant le système d'équations suivant :

$$\sum_{\substack{1 \leq k \leq r+1 \\ j_k \notin I}} (-1)^{k+\iota(I, \{j_k\})} v_{I \cup \{j_k\}} v_{J \setminus \{j_k\}} = 0$$

pour tout $I \in \Lambda(r-1, n)$ et pour tout $J = \{j_1 < \dots < j_{r+1}\} \in \Lambda(r+1, n)$. Ces équations sont appelées les *relations de Plücker*.

Maintenant que les coordonnées de Plücker ont été définies, on donne un corollaire du développement de Laplace (proposition 2.1) en termes de coordonnées de Plücker.

Corollaire 2.7 (développement de Laplace) Soient $n \geq 2$, $a, b \in \{1, \dots, n-1\}$ tels que $a + b = n$, $M_A \in M_{n,a}(\mathbb{R})$ et $M_B \in M_{n,b}(\mathbb{R})$ deux matrices de rangs a et b respectivement. Notons M la matrice carrée définie comme suit, par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} M_A & M_B \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Notons A et B les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n engendrés par les colonnes de M_A et M_B respectivement. Posons $N = \binom{n}{a} = \binom{n}{b}$, et notons $(\zeta_1, \dots, \zeta_N)$ les coordonnées de Plücker de A associées à M_A et classées par ordre lexicographique, et (η_1, \dots, η_N) celles de B associées à M_B et classées par ordre lexicographique.

Alors il existe une fonction ε à valeurs dans $\{\pm 1\}$ telle que

$$\det(M) = \sum_{i=1}^N \varepsilon(i) \zeta_i \eta_{N+1-i}.$$

On finit avec un lemme permettant de montrer qu'on peut trouver un représentant des coordonnées de Plücker de n'importe quel sous-espace rationnel, tel que celles-ci soient entières et premières entre elles. On inclut une preuve de ce lemme, faute d'avoir trouvé une référence pour celui-ci.

Lemme 2.8 Soient $n \geq 2$ un entier, $e \in \{1, \dots, n\}$ et $B \in \mathfrak{R}_n(e)$. Il existe une base (X_1, \dots, X_e) de $B \cap \mathbb{Z}^n$ telle qu'en notant $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_N)$, où $N = \binom{n}{e}$, les coordonnées de Plücker associées à (X_1, \dots, X_e) et ordonnées selon l'ordre lexicographique, on ait $\eta \in \mathbb{Z}^N$ et

$$\text{pgcd}(\eta_1, \dots, \eta_N) = 1.$$

Preuve.

Comme B est un sous-espace rationnel, $B \cap \mathbb{Z}^n$ est un sous- \mathbb{Z} -module du \mathbb{Z} -module libre \mathbb{Z}^n . D'après le théorème de la base adaptée, il existe une base (X_1, \dots, X_n) de \mathbb{Z}^n et des entiers $d_1, \dots, d_e \geq 1$ tels que $(d_1 X_1, \dots, d_e X_e)$ soit une base de $B \cap \mathbb{Z}^n$.

Soit $i \in \{1, \dots, e\}$. Comme $d_i X_i \in B \cap \mathbb{Z}^n$ et que $X_i \in \mathbb{Z}^n$, on a $X_i \in B \cap \mathbb{Z}^n$, d'où $d_i = 1$.

Finalement, (X_1, \dots, X_e) est une base de $B \cap \mathbb{Z}^n$.

Notons M la matrice de $M_n(\mathbb{Z})$ dont les colonnes sont respectivement X_1, \dots, X_n . Notons M_1 la matrice de $M_{n,e}(\mathbb{Z})$ formée des e premières colonnes de M et M_2 la matrice de $M_{n,n-e}(\mathbb{Z})$ formée des $n - e$ dernières colonnes de M .

Remarquons que les mineurs de taille $e \times e$ de M_1 donnent le représentant $(\eta_1, \dots, \eta_N) \in \mathbb{Z}^N$, des coordonnées de Plücker de B associées à sa base (X_1, \dots, X_e) . Notons $\delta_1, \dots, \delta_N$ les mineurs de taille $(n - e) \times (n - e)$ de M_2 dans l'ordre lexicographique.

En appliquant la proposition 2.1 du développement de Laplace, on obtient

$$|\det M| = \left| \sum_{i=1}^N \varepsilon(i) \eta_i \delta_{N+1-i} \right|$$

où ε est une fonction à valeurs dans $\{\pm 1\}$. Or

$$|\det M| = \text{covol}(\mathbb{Z}^n) = 1,$$

donc

$$\left| \sum_{i=1}^N \varepsilon(i) \eta_i \delta_{N+1-i} \right| = 1,$$

ce qui est une relation de Bézout généralisée. Finalement,

$$\text{pgcd}(\eta_1, \dots, \eta_N) = 1. \quad \square$$

2.1.2 Déterminant généralisé

Donnons ici plusieurs résultats montrés par Schmidt [Sch67] sur la complexité et la proximité des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n , qui ont en commun la notion suivante qui n'est rien d'autre que la racine carrée du déterminant de Gram.

Définition 2.9 Soit (X_1, \dots, X_ℓ) une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n . Notons $M \in M_{n,\ell}(\mathbb{R})$ la matrice dont la j -ème colonne est X_j pour tout $j \in \{1, \dots, \ell\}$. On définit le *déterminant généralisé* de la famille (X_1, \dots, X_ℓ) comme

$$D(X_1, \dots, X_\ell) = \sqrt{\det({}^tMM)} = \sqrt{\text{Gram}(X_1, \dots, X_\ell)}.$$

Le déterminant généralisé possède les propriétés suivantes, données dans [Sch67] page 434.

Proposition 2.10 Soit X_1, \dots, X_ℓ une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n . On a

- (i) $D(X_1, \dots, X_\ell) \geq 0$;
- (ii) $D(X_1, \dots, X_\ell) = 0$ si, et seulement si, (X_1, \dots, X_ℓ) est liée;
- (iii) $D(X_1, \dots, X_\ell) = D(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(\ell)})$ pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_\ell$;
- (iv) $D(\rho(X_1), \dots, \rho(X_\ell)) = D(X_1, \dots, X_\ell)$ si ρ est une transformation orthogonale;
- (v) $D(X_1, \dots, tX_k, \dots, X_\ell) = |t| D(X_1, \dots, X_\ell)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \{1, \dots, \ell\}$;
- (vi) $D(X_1, \dots, X_\ell) = D(X_1, \dots, X_k + cX_m, \dots, X_\ell)$ pour tout $c \in \mathbb{R}$ et pour tout $m \neq k$.

Schmidt définit dans l'équation (6) page 446 de son article une quantité qui regroupe tous les angles canoniques entre deux sous-espaces A et B tels que $\min(\dim A, \dim B) = t$:

$$\varphi(A, B) = \prod_{i=1}^t \psi_i(A, B). \quad (2.1)$$

Il démontre page 446 de [Sch67] le résultat suivant :

Proposition 2.11 Soient (X_1, \dots, X_d) une base de A et (Y_1, \dots, Y_e) une base de B , alors

$$\varphi(A, B) = \frac{D(X_1, \dots, X_d, Y_1, \dots, Y_e)}{D(X_1, \dots, X_d)D(Y_1, \dots, Y_e)}.$$

Ce résultat montre que la proximité de A et B s'exprime en fonction de déterminants généralisés. C'est en fait surtout celui du numérateur qui importe ici : on va voir (remarque 2.15 ci-dessous) que le dénominateur est le produit des hauteurs de A et B , si les bases sont bien choisies.

En effet, cette notion conduit à une définition équivalente de la hauteur d'un sous-espace rationnel (proposition 2.14). Pour relier déterminant généralisé et hauteur, fixons quelques notions de géométrie.

Définition 2.12 On appelle *réseau* de \mathbb{R}^n tout \mathbb{Z} -module engendré par des vecteurs \mathbb{R} -linéairement indépendants dans \mathbb{R}^n .

Soit Γ un réseau de \mathbb{R}^n ; on appelle *rang* de Γ , noté $\text{rg}(\Gamma)$, le rang du \mathbb{Z} -module associé. Une *base* de Γ est une base de ce \mathbb{Z} -module.

Définition 2.13 Soient Γ un réseau de \mathbb{R}^n de rang $e \in \{1, \dots, n\}$ et (x_1, \dots, x_e) une base de Γ . Notons $X \in M_{n,e}(\mathbb{R})$ la matrice dont les colonnes sont respectivement x_1, \dots, x_e . On définit le *covolume* de Γ , noté $\text{covol}(\Gamma)$, comme

$$\text{covol}(\Gamma) = |\det X|.$$

Géométriquement, le covolume d'un réseau correspond à la mesure d'un parallélépipède minimal, *i.e.* de mesure minimale, de ce réseau (pour la mesure de Lebesgue sur $\text{Vect}(\Gamma)$). Autrement dit, c'est le volume d'une maille de ce réseau, et celui du quotient $\text{Vect}(\Gamma)/\Gamma$. Cette notion conduit à la proposition suivante (théorème 1 page 435 de [Sch67]).

Proposition 2.14 Soit B un sous-espace rationnel de \mathbb{R}^n . On a

$$H(B) = \text{covol}(B \cap \mathbb{Z}^n).$$

Ainsi, la définition 1.5 et la proposition 2.14 fournissent deux points de vue équivalents sur la hauteur d'un sous-espace vectoriel. La définition 1.5 donne une vision algébrique de la hauteur, quand la proposition 2.14 en propose une plus géométrique.

Pour relier ceci au déterminant généralisé, on peut remarquer (voir page 298 de [Fis14]) que si X_1, \dots, X_ℓ sont des vecteurs de \mathbb{R}^n , $D(X_1, \dots, X_\ell)$ est le ℓ -volume du parallélotope défini par X_1, \dots, X_ℓ (*i.e.* le volume de ce parallélotope vu dans l'espace euclidien $\text{Vect}(X_1, \dots, X_\ell)$ s'il est de dimension ℓ , 0 sinon). On en déduit la remarque suivante :

Remarque 2.15 Si $B \in \mathfrak{R}_n(e)$ et que (X_1, \dots, X_e) est une \mathbb{Z} -base de $B \cap \mathbb{Z}^n$, alors

$$H(B) = D(X_1, \dots, X_e).$$

2.1.3 Comportement de la hauteur vis-à-vis d'une transformation linéaire

Cette sous-section s'inspire du résultat énoncé dans l'équation (6) page 433 de [Sch67], sur le comportement de la hauteur vis-à-vis d'une transformation linéaire inversible. On étend ici ce résultat à certains cas où le morphisme n'est pas inversible. La preuve est très similaire à celle page 433 de [Sch67].

Ici et dans toute la suite, $\|\cdot\|$ désignera la norme euclidienne canonique.

Proposition 2.16 Soient $n \geq 3$ et $e, p \in \{1, \dots, n\}$; soient $B \in \mathfrak{R}_e(n)$ et F deux sous-espaces vectoriels rationnels de \mathbb{R}^n tels que $B \subset F$; soit $\varphi: F \rightarrow \mathbb{R}^p$ un morphisme linéaire rationnel tel que

$$\dim \varphi(B) = \dim B.$$

Alors il existe une constante $c(\varphi) > 0$, indépendante de B , telle que

$$H(\varphi(B)) \leq c(\varphi)H(B).$$

Preuve.

On prolonge φ en un endomorphisme rationnel de \mathbb{R}^n en étendant son espace d'arrivée de \mathbb{R}^p à \mathbb{R}^n et en posant $\varphi(x) = x$ pour tout $x \in F^\perp$.

On commence par démontrer le résultat pour un sous-espace rationnel L de dimension 1.

Soit $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{Z}^n$ tel que $\text{pgcd}(\xi_1, \dots, \xi_n) = 1$ et

$$L = \text{Vect}(\xi).$$

On a alors $\varphi(L) = \text{Vect}(\varphi(\xi))$, et il existe $c_1(\varphi) > 0$ indépendante de ξ telle que

$$\|\varphi(\xi)\| \leq c_1(\varphi) \|\xi\|.$$

Notons $(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{Q}^n$ les coordonnées de $\varphi(\xi)$.

Comme $\varphi \in M_n(\mathbb{Q})$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k\varphi \in M_n(\mathbb{Z})$. Alors $k\varphi(\xi) \in \mathbb{Z}^n$, donc

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad k\zeta_i \in \mathbb{Z}.$$

En notant \mathfrak{b} l'idéal fractionnaire engendré par les ζ_i , on a alors

$$k\mathfrak{b} = k(\zeta_1\mathbb{Z} + \dots + \zeta_n\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z},$$

d'où $kN(\mathfrak{b}) = N(k\mathfrak{b}) \geq 1$. Ceci donne en utilisant la remarque 1.6 que

$$H(\varphi(L)) = N(\mathfrak{b})^{-1} \|\varphi(\xi)\| \leq kc_1(\varphi) \|\xi\| = c(\varphi) \|\xi\| = c(\varphi)H(L)$$

en posant $c(\varphi) = kc_1(\varphi)$.

Montrons maintenant le résultat pour un sous-espace rationnel B de dimension e . On pose $N = \binom{n}{e}$.

On note B^* la droite rationnelle de \mathbb{R}^N engendrée par les coordonnées de Plücker de B . Comme par hypothèse $\dim \varphi(B) = \dim B$, la droite rationnelle $\varphi(B)^*$ engendrée par les coordonnées de Plücker de $\varphi(B)$ appartient elle aussi à \mathbb{R}^N .

D'après la définition 1.5 de la hauteur, on a

$$H(B) = H(B^*) \quad \text{et} \quad H(\varphi(B)) = H(\varphi(B)^*).$$

Par ailleurs, si $S \in M_n(\mathbb{Q})$ est la matrice de φ dans la base canonique de \mathbb{R}^n , alors $\Lambda^e(S) \in M_N(\mathbb{Q})$ est la matrice de $\varphi^{(e)}$, la e -ième puissance composée de φ , dans la base canonique de \mathbb{R}^N . D'après [Sch67] page 433, on a alors

$$\varphi(B)^* = \varphi^{(e)}(B^*),$$

donc

$$H(\varphi(B)^*) = H(\varphi^{(e)}(B^*)).$$

On est alors ramené au cas de la dimension 1 dans \mathbb{R}^N , et il est possible d'appliquer le début de la preuve pour conclure.

On remarque que la constante $c(\varphi)$ ne dépend pas de e quitte à considérer

$$c(\varphi) = \max_{1 \leq e \leq n} c^{(e)}(\varphi). \quad \square$$

Remarque 2.17 La proposition 2.16 s'applique à tout $B \in \mathfrak{X}_n(e)$ si φ est un automorphisme de \mathbb{R}^n .

2.2 Sur la proximité

Dans cette section sont exposés plusieurs outils sur les angles entre deux sous-espaces vectoriels. Un premier lemme permet de calculer la proximité entre un vecteur et son projeté orthogonal sur un sous-espace vectoriel. Ce lemme est illustré sur la figure 2.1 ci-dessous.

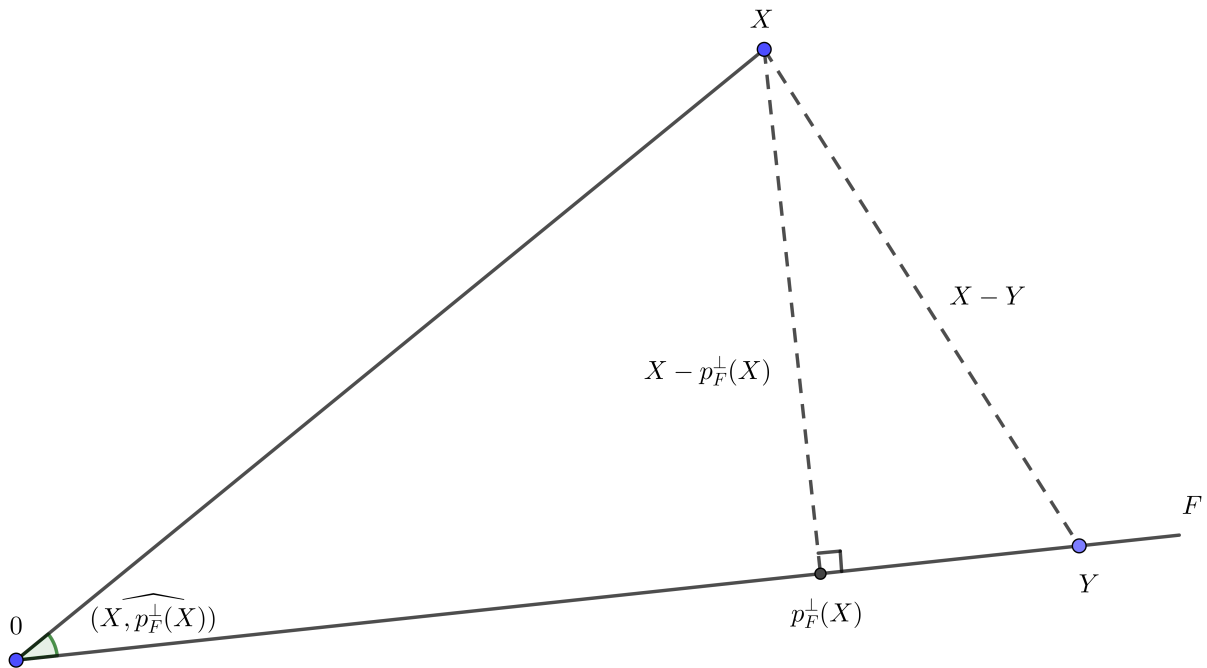


FIGURE 2.1 – Illustration des lemmes 2.18 et 2.19

Lemme 2.18 Soient F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n , p_F^\perp la projection orthogonale sur F et $X \in \mathbb{R}^n \setminus F^\perp$. Alors

$$\psi(X, p_F^\perp(X)) = \frac{\|X - p_F^\perp(X)\|}{\|X\|}.$$

Preuve.

On utilise la définition géométrique du sinus dans le triangle rectangle formé par les vecteurs X et $p_F^\perp(X)$. □

Le lemme suivant permet de majorer l'angle entre deux vecteurs en fonction de leurs normes. Il est aussi illustré sur la figure 2.1.

Lemme 2.19 Soient X et Y deux vecteurs non nuls. On a

$$\psi(X, Y) \leq \frac{\|X - Y\|}{\|X\|}.$$

Preuve.

On applique le lemme 2.18 avec $F = \text{Vect}(Y)$. On note $p_{\text{Vect}(Y)}^\perp$ la projection orthogonale sur $\text{Vect}(Y)$. D'après le théorème de Pythagore, on a

$$\|X - Y\|^2 = \|X - p_{\text{Vect}(Y)}^\perp(X)\|^2 + \|Y - p_F^\perp(X)\|^2,$$

donc

$$\|X - p_{\text{Vect}(Y)}^\perp(X)\| \leq \|X - Y\|$$

et le résultat découle du lemme 2.18. □

À l'inverse du lemme 2.19, le prochain lemme permet de minorer l'angle entre deux vecteurs en fonction de leurs normes. Celui-ci est illustré sur la figure 2.2.

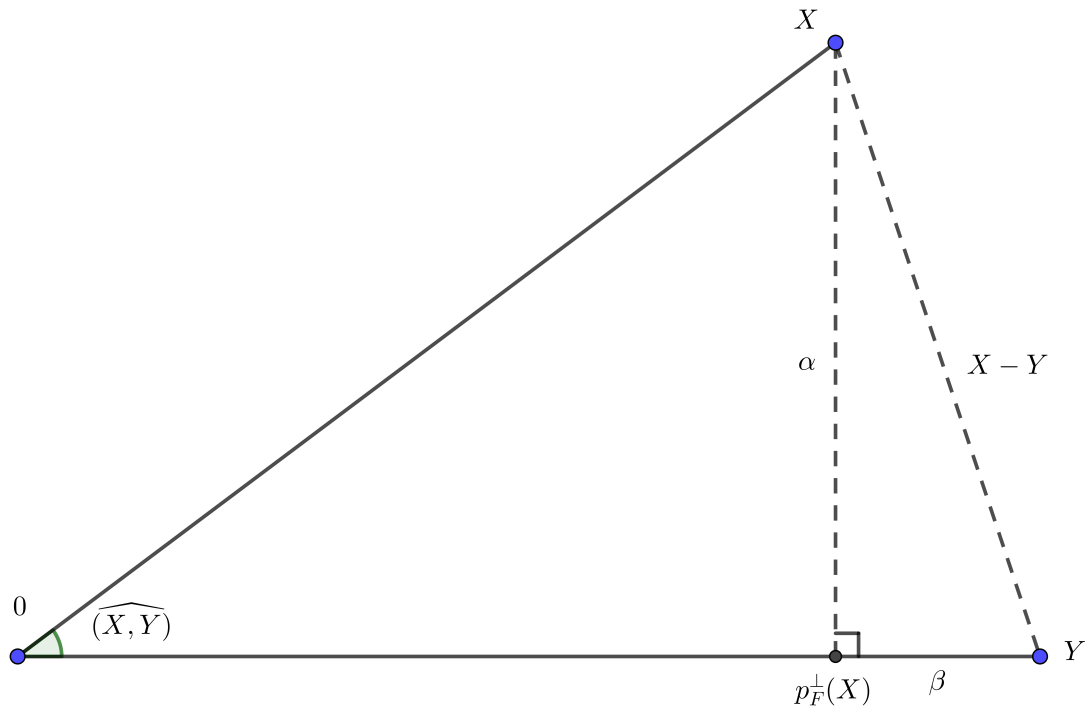


FIGURE 2.2 – Illustration du lemme 2.20

Lemme 2.20 Soient X et Y deux vecteurs unitaires tels que $X \cdot Y \geq 0$. On a

$$\psi(X, Y) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \|X - Y\|.$$

Preuve.

On note $p_{\text{Vect}(Y)}^\perp$ la projection orthogonale sur $\text{Vect}(Y)$, ainsi que

$$\alpha = \|X - p_{\text{Vect}(Y)}^\perp(X)\| \quad \text{et} \quad \beta = \|Y - p_{\text{Vect}(Y)}^\perp(X)\|.$$

D'après le théorème de Pythagore, on a

$$\|X - Y\|^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Or X est unitaire, donc d'après le lemme 2.18, on a

$$\psi(X, Y) = \psi(X, p_{\text{Vect}(Y)}^\perp(X)) = \|X - p_{\text{Vect}(Y)}^\perp(X)\| = \alpha.$$

De plus $X \cdot Y \geq 0$, donc en appliquant à nouveau le théorème de Pythagore, on a

$$1 = \|X\|^2 = (1 - \beta)^2 + \alpha^2.$$

Il existe donc $\theta \in [0, \pi/2]$ tel que $1 - \beta = \cos \theta$ et $\alpha = \sin \theta$. Or

$$\forall \theta \in [0, \pi/2], \quad 1 - \cos \theta \leq \sin \theta,$$

donc

$$\beta \leq \alpha = \|X - p_{\text{Vect}(Y)}^\perp(X)\|.$$

Finalement,

$$\|X - Y\|^2 \leq 2\alpha^2 = 2\psi(X, Y)^2. \quad \square$$

Le lemme ci-dessous relie l'angle entre un vecteur et un sous-espace vectoriel, à l'angle entre le vecteur et son projeté orthogonal sur le sous-espace. Il est illustré sur la figure 2.3 ci-dessous.

Lemme 2.21 Soient $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n tel que $\dim F \in \{1, \dots, n-1\}$. Notons p_F^\perp la projection orthogonale sur F . On a

$$\psi_1(\text{Vect}(X), F) = \psi(X, p_F^\perp(X)).$$

Preuve.

Sans perte de généralité, on peut supposer que X est unitaire; soit $Y \in F \setminus \{0\}$. Si $X \in F$ le résultat est trivial. Sinon, on note $p_{\text{Vect}(Y)}^\perp$ la projection orthogonale sur $\text{Vect}(Y)$, le triangle dont les sommets sont les vecteurs X , $p_{\text{Vect}(Y)}^\perp(X)$ et $p_F^\perp(X)$ est rectangle en $p_F^\perp(X)$. Ainsi,

$$\|X - p_F^\perp(X)\| \leq \|X - p_{\text{Vect}(Y)}^\perp(X)\|.$$

D'après le lemme 2.18 et comme X est un vecteur unitaire, on a

$$\psi(X, p_F^\perp(X)) = \|X - p_F^\perp(X)\|$$

donc toujours d'après le lemme 2.18

$$\psi(X, Y) = \psi(X, p_{\text{Vect}(Y)}^\perp(X)) = \|X - p_{\text{Vect}(Y)}^\perp(X)\|,$$

donc

$$\psi(X, p_F^\perp(X)) \leq \psi(X, Y).$$

D'après l'équation (1.2) définissant ψ_1 , on a donc

$$\psi_1(\text{Vect}(X), F) = \min_{Z \in F \setminus \{0\}} \psi(X, Z) = \psi(X, p_F^\perp(X)). \quad \square$$

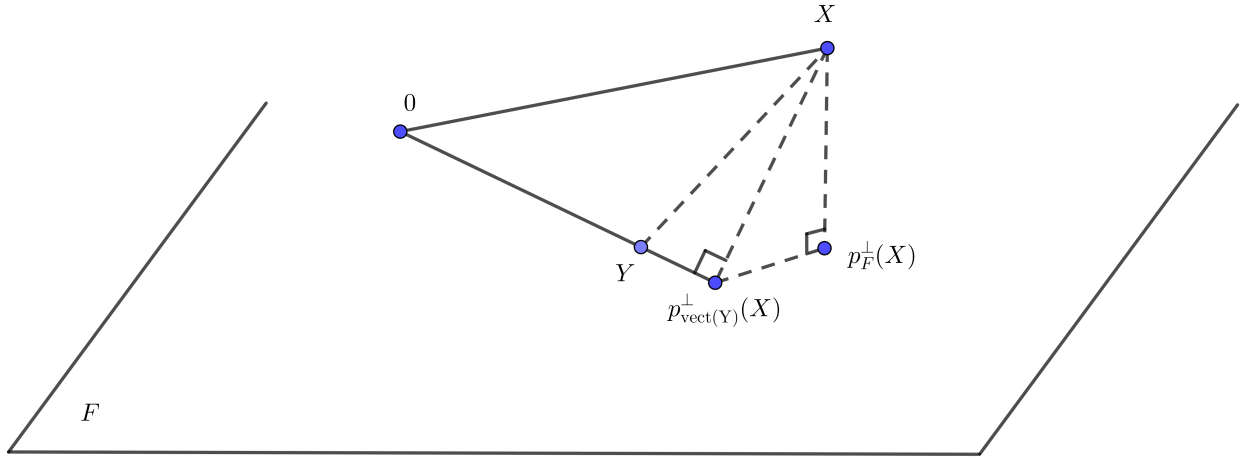


FIGURE 2.3 – Illustration du lemme 2.21

Les deux résultats suivants correspondent respectivement au lemme 12 et à son corollaire dans l'article [Sch67] page 444.

Proposition 2.22 (Schmidt) Soient A et B deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n de dimensions respectives d et e . Alors pour tout $j \in \{1, \dots, \min(d, e)\}$, $\psi_j(A, B)$ est le plus petit réel $\psi \geq 0$ tel qu'il existe un sous-espace $A' \subset A$ de dimension j tel que

$$\forall X \in A' \setminus \{0\}, \quad \exists Y \in B \setminus \{0\}, \quad \psi(X, Y) \leq \psi.$$

Corollaire 2.23 (Schmidt) Soient $A' \subset A$ et $B' \subset B$ quatre sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n . Alors

$$\forall j \in \{1, \dots, \min(A', B')\}, \quad \psi_j(A, B) \leq \psi_j(A', B').$$

On déduit de la proposition 2.22 le lemme suivant.

Lemme 2.24 Soient A et B deux sous-espaces vectoriels non triviaux de \mathbb{R}^n tels que $\dim A \leq \dim B$. Alors

$$\forall X \in A \setminus \{0\}, \quad \psi_1(\text{Vect}(X), B) \leq \psi_{\dim A}(A, B).$$

Preuve.

Soit $X \in A \setminus \{0\}$. On a

$$\begin{aligned} \psi_1(\text{Vect}(X), B) &= \min_{Y \in B \setminus \{0\}} \psi(X, Y) \\ &\leq \max_{Z \in A \setminus \{0\}} \min_{Y \in B \setminus \{0\}} \psi(Z, Y) \\ &= \min\{\varphi, \forall Z \in A \setminus \{0\}, \exists Y \in B \setminus \{0\}, \psi(Z, Y) \leq \varphi\} \\ &= \psi_{\dim A}(A, B) \end{aligned}$$

d'après la proposition 2.22. □

Mentionnons une inégalité triangulaire entre les angles ([Sch67], équation (3) page 446).

Proposition 2.25 (Schmidt) Pour tous $X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$ non nuls, on a

$$\psi(X, Z) \leq \psi(X, Y) + \psi(Y, Z).$$

Finalement, énonçons une proposition sur la proximité entre deux sous-espaces transformés par une transformation inversible. Celle-ci regroupe la fin du théorème 1.8 et le lemme 13 page 446 de l'article [Sch67].

Proposition 2.26 (Schmidt) Soient A et B deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n de dimensions respectives d et e , et $\varphi \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Il existe une constante $c_\varphi > 0$ (indépendante de A et de B) telle que

$$\forall j \in \{1, \dots, \min(d, e)\}, \quad \psi_j(\varphi(A), \varphi(B)) \leq c_\varphi \psi_j(A, B).$$

De plus, si φ est une isométrie, alors

$$\forall j \in \{1, \dots, \min(d, e)\}, \quad \psi_j(\varphi(A), \varphi(B)) = \psi_j(A, B).$$

2.3 Deux résultats d'approximation simultanée

Dans cette section, on énonce deux théorèmes d'approximation simultanée qui serviront dans les chapitres 3 et 4.

Commençons par le théorème d'approximation simultanée de Dirichlet (voir [HW07] théorème 200 page 216).

Théorème 2.27 (Dirichlet) Soient $d \geq 1$ entier et $x \in \mathbb{R}^d \setminus \mathbb{Q}^d$. Il existe une infinité de couples $(p, q) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}^*$ tels que $\text{pgcd}(p_1, \dots, p_d, q) = 1$ et

$$\left\| x - \frac{p}{q} \right\|_\infty \leq \frac{1}{q^{1+1/d}}.$$

Mentionnons aussi le corollaire du théorème 2 de l'article [Sch70] qui permet de minorer les valeurs entières d'une forme linéaire à coefficients algébriques.

Proposition 2.28 (Schmidt, 1970) Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ des nombres algébriques tels que $1, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ soient linéairement indépendants sur \mathbb{Q} . Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $c > 0$, telle que pour tous entiers q_1, \dots, q_k, p tels que $\max(|q_1|, \dots, |q_k|) > 0$, on ait

$$\left| p + \sum_{i=1}^k q_i \alpha_i \right| \geq c \max(|q_1|, \dots, |q_k|)^{-k-\varepsilon}.$$

2.4 Théorèmes de Going-up et Going-down

Ces théorèmes sont démontrés dans [Sch67] (théorèmes 9 et 10 page 453, en faisant attention, car il y a un "+1" au lieu d'un "-1" dans le théorème du Going-up, et un signe "-" oublié dans le théorème du Going-down), et permettent de déduire des résultats en changeant la dimension du sous-espace vectoriel approchant.

Théorème 2.29 (Going-up, Schmidt, 1967) Soient $d, e \in \mathbb{N}^*$ tels que $d+e < n$; posons $t = \min(d, e)$. Soient A un sous-espace de \mathbb{R}^n de dimension d et $B \in \mathfrak{R}_n(e)$. Soit $H \geq 1$ tel que $H(B) \leq H$, et tel qu'il existe des $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall i \in \{1, \dots, t\}, \quad H(B)^{x_i} \psi_i(A, B) \leq c_1 H^{-y_i}$$

avec $c_1 > 0$.

Alors il existe une constante $c_2 > 0$ dépendant uniquement de n et de e , et une constante $c_3 > 0$ dépendant uniquement de n, e, x_i et y_i , telles qu'en posant

$$H' = c_2 H^{(n-e-1)/(n-e)},$$

il existe $C \in \mathfrak{R}_n(e+1)$ tel que

$$\begin{cases} C \supset B \\ H(C) \leq H' \\ \forall i \in \{1, \dots, t\}, \quad H(C)^{x_i(n-e)/(n-e-1)} \psi_i(A, C) \leq c_1 c_3 H'^{-y_i(n-e)/(n-e-1)}. \end{cases}$$

Théorème 2.30 (Going-down, Schmidt, 1967) Soient $d, e \in \mathbb{N}^*$ tels que $d+e \leq n$. Soient A un sous-espace de \mathbb{R}^n de dimension d et $B \in \mathfrak{R}_n(e)$. Soit $H \geq 1$ tel que $H(B) \leq H$. Posons $f = \min(d, e-1)$. Soient $h \in \{1, \dots, f\}$, $c_1 \geq 1$ et

$$y_1 \geq \dots \geq y_h \geq \frac{1}{h}$$

tels que

$$\forall i \in \{1, \dots, h\}, \quad H(B) \psi_i(A, B) \leq c_1 H^{-y_i+1}.$$

Alors il existe des constantes c_2, \dots, c_5 , qui ne dépendent que de n, d, e, y_1, \dots, y_h mais pas de A, B ou H , telles que les propriétés suivantes soient vérifiées.

Posons $y = y_1 + \dots + y_h$ et supposons que

$$\forall i \in \{1, \dots, h\}, \quad y'_i = \frac{y_i e}{y + e - 1} \geq 1.$$

Alors il existe $C \in \mathfrak{R}_n(e-1)$ tel qu'en posant

$$H' = c_2 H^{(e+y-1)/e},$$

on ait

$$\begin{cases} C \subset B \\ H(C) \leq H' \\ \forall i \in \{1, \dots, t\}, \quad \psi_i(A, C) \leq c_3 H(C)^{-y'_i}. \end{cases}$$

De plus, si

$$\forall i \in \{1, \dots, h\}, \quad \psi_i(A, B) = 0,$$

alors on pose $y'_0 = e/h$, et pour tout $H' \geq c_4 H > 0$, il existe $C \in \mathfrak{A}_n(e-1)$ tel que

$$\begin{cases} C \subset B \\ H(C) \leq H' \\ \forall i \in \{1, \dots, t\}, \quad \psi_i(A, C) \leq c_5 H^{y'_0} H(C)^{-y'_0}. \end{cases}$$

Chapitre 3

Différents cas particuliers

Ce chapitre est découpé selon la dimension de l'espace ambiant dans lequel sont traités les cas particuliers abordés ici.

On commence à la section 3.1 par quelques lemmes qui serviront en toute dimension ; puis on étudie le cas de \mathbb{R}^4 en montrant que $\dot{\mu}_4(2|2)_1 = 3$ (section 3.2) et celui de \mathbb{R}^5 en majorant $\dot{\mu}_5(3|2)_1$ par 6 (section 3.3). Après quelques commentaires (section 3.4) on majore $\dot{\mu}_{2d}(d|d-1)_1$ dans \mathbb{R}^{2d} (section 3.5).

3.1 Outils en toute dimension

Il est possible de faire le lien entre proximité et hauteur grâce au lemme suivant, dans lequel

$$\varphi(A, B) = \prod_{j=1}^{\min(\dim A, \dim B)} \psi_j(A, B) \quad (3.1)$$

a été défini dans la sous-section 2.1.2 (équation (2.1)).

Lemme 3.1 Soient $n \geq 2$, A un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n de dimension d et $B \in \mathfrak{R}_n(e)$ un sous-espace vectoriel rationnel de dimension e . On suppose que $d+e = n$. Notons (X_1, \dots, X_d) une base de A et (Y_1, \dots, Y_e) une base de $B \cap \mathbb{Z}^n$, ainsi que $M \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice dont les colonnes sont respectivement $X_1, \dots, X_d, Y_1, \dots, Y_e$. Alors il existe une constante $c > 0$ ne dépendant que de (X_1, \dots, X_d) telle que

$$\varphi(A, B) = c \frac{|\det M|}{H(B)}.$$

Preuve.

D'après la proposition 2.11, on a

$$\varphi(A, B) = \frac{D(X_1, \dots, X_d, Y_1, \dots, Y_e)}{D(Y_1, \dots, Y_e)D(X_1, \dots, X_d)}.$$

Comme (Y_1, \dots, Y_e) est une base de $B \cap \mathbb{Z}^n$, la remarque 2.15 découlant du point de vue géométrique sur la hauteur permet d'obtenir

$$\varphi(A, B) = D(X_1, \dots, X_d, Y_1, \dots, Y_e) \frac{c}{H(B)}$$

où $c = D(X_1, \dots, X_d)^{-1} > 0$ est une constante ne dépendant que de la base (X_1, \dots, X_d) .

De plus, la matrice M est une matrice carrée, donc la définition 2.9 donne

$$D(X_1, \dots, X_d, Y_1, \dots, Y_e)^2 = \det({}^t M M) = \det(M)^2.$$

Ainsi, comme $D(X_1, \dots, X_d, Y_1, \dots, Y_e) \geq 0$ (proposition 2.10 (i)), on a

$$\varphi(A, B) = c \frac{|\det M|}{H(B)}. \quad \square$$

Donnons un autre lemme, qui permet de minorer les angles canoniques en fonction de φ .

Lemme 3.2 Soient $n \geq 2$, et A et B deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n de dimensions respectives d et e . Alors

$$\forall j \in \{1, \dots, \min(d, e)\}, \quad \psi_j(A, B) \geq \varphi(A, B)^{1/j}.$$

Preuve.

On pose $t = \min(d, e)$; soit $j \in \{1, \dots, t\}$. D'après la définition 1.7 et le théorème 1.8, on a

$$\psi_1(A, B) \leq \dots \leq \psi_t(A, B) \leq 1.$$

Ainsi, le produit (3.1) peut se découper :

$$\varphi(A, B) = \left(\prod_{i=1}^j \underbrace{\psi_i(A, B)}_{\leq \psi_j(A, B)} \right) \times \left(\prod_{i=j+1}^t \underbrace{\psi_i(A, B)}_{\leq 1} \right) \leq \psi_j(A, B)^j$$

ce qui conclut la preuve du lemme 3.2. □

3.2 Dans \mathbb{R}^4

Comme mentionné en introduction de cette thèse, le cas le plus simple encore ouvert est le cas

$$(n, d, e, j) = (4, 2, 2, 1).$$

En combinant les résultats de Schmidt et Moshchevitin, on a uniquement l'encadrement $3 \leq \dot{\mu}_4(2|2)_1 \leq 4$. Schmidt mentionne d'ailleurs explicitement ce cas en conclusion de [Sch67] page 471, et c'est de plus le seul cas encore ouvert dans \mathbb{R}^4 .

La question de déterminer $\dot{\mu}_4(2|2)_1$ se trouve complètement résolue grâce au théorème 3.3 :

Théorème 3.3 On a

$$\hat{\mu}_4(2|2)_1 = 3.$$

Ainsi, ce théorème clôture le problème 1.12 dans le cas $n = 4$.

3.2.1 Construction de plans mal approchés de $\mathfrak{I}_4(2, 2)_1$

Pour démontrer le théorème 3.3, on construit explicitement dans cette sous-section des plans de \mathbb{R}^4 particulièrement mal approchés par les plans rationnels de \mathbb{R}^4 .

Une famille de sous-espaces vectoriels particuliers sera centrale ici : définissons pour $\xi \in]0, \sqrt{7}[$, le sous-espace vectoriel A_ξ de \mathbb{R}^4 de dimension 2 engendré par

$$X_\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \xi \\ \sqrt{7 - \xi^2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\sqrt{7 - \xi^2} \\ \xi \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

de sorte à faire apparaître les trois nombres 1, ξ et $\sqrt{7 - \xi^2}$ dans les coordonnées de Plücker de A_ξ .

Différents résultats sont obtenus sur ces sous-espaces, dont les démonstrations se trouvent dans la sous-section 3.2.2.

On montre que pour tout $\xi \in]0, \sqrt{7}[$ algébrique de degré au moins égal à 3, le plan A_ξ :

- vérifie la condition de (2, 1)-irrationalité,
- est mal approché par les plans rationnels de \mathbb{R}^4 .

Lemme 3.4 Pour tout $\xi \in]0, \sqrt{7}[$ algébrique de degré au moins égal à 3, on a

$$A_\xi \in \mathfrak{I}_4(2, 2)_1. \quad (3.3)$$

De plus, pour tous les nombres algébriques ξ vérifiant (3.3), on a

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists c > 0, \quad \forall B \in \mathfrak{A}_4(2), \quad \varphi(A_\xi, B) \geq \frac{c}{H(B)^{3+\varepsilon}}. \quad (3.4)$$

A fortiori, la condition de (2, 2)-irrationalité étant plus faible, le lemme 3.4 montre aussi que pour tout $\xi \in]0, \sqrt{7}[$ algébrique de degré au moins égal à 3, on a $A_\xi \in \mathfrak{I}_4(2, 2)_2$. De plus, le lemme 3.2 montre que le lemme 3.4 est aussi vrai en remplaçant $\varphi(A_\xi, B)$ par $\psi_1(A_\xi, B)$.

De ceci découle alors la proposition centrale suivante qui permet de démontrer le théorème 3.3 et ainsi d'apporter une réponse au problème 1.12 pour $n = 4$. Cette résolution est de plus explicite.

Proposition 3.5 Pour tout nombre algébrique $\xi \in]0, \sqrt{7}[$ de degré au moins égal à 3, on a

$$\mu_4(A_\xi|2)_1 = 3.$$

Remarque 3.6 La conclusion de la proposition 3.5 est encore vraie pour tout nombre algébrique $\xi \in]0, \sqrt{7}[$ de degré 2 vérifiant

$$\dim_{\mathbb{Q}} \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(1, \xi, \sqrt{7 - \xi^2}) = 3.$$

En particulier pour $\xi = \sqrt{2}$, on a bien

$$\dim_{\mathbb{Q}} \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(1, \xi, \sqrt{7 - \xi^2}) = \dim_{\mathbb{Q}} \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(1, \sqrt{2}, \sqrt{5}) = 3,$$

donc

$$\mu_4(A_{\sqrt{2}}|2)_1 = 3.$$

Remarque 3.7 On peut construire une infinité non dénombrable de sous-espaces A_ξ vérifiant $\mu_4(A_\xi|2)_1 = 3$ grâce à un théorème de D. Y. Kleinbock et G. A. Margulis. En effet, pour Lebesgue-presque tout $\xi \in]0, \sqrt{7}[$, on a $\dim_{\mathbb{Q}} \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(1, \xi, \sqrt{7 - \xi^2}) = 3$. On remplace alors l'utilisation page 51 de la proposition 2.28 dans la preuve du lemme 3.4 par le théorème A page 3 de l'article [KM98]. Celui-ci s'applique car la variété de \mathbb{R}^3

$$M = \left\{ (1, \xi, \sqrt{7 - \xi^2}), \xi \in]0, \sqrt{7}[\right\}$$

est non dégénérée (*i.e.* aucun de ses points n'a de voisinage inclus dans un hyperplan affine de \mathbb{R}^3), et l'inégalité (3.15) est obtenue cette fois-ci pour Lebesgue-presque tout $\xi \in]0, \sqrt{7}[$.

3.2.2 Les preuves

Cette sous-section apporte les preuves des résultats énoncés sans démonstration dans la sous-section 3.2.1 précédente. Notons déjà que le théorème 3.3 suit de la définition de $\dot{\mu}$ et de la proposition 3.5. Par ailleurs, compte tenu du lemme 3.2 (appliqué avec $j = 1$), le lemme 3.4 montre que $\mu_4(A_\xi|2)_1 \leq 3$. Or le théorème 1.14 donne $\mu_4(A_\xi|2)_1 \geq \dot{\mu}_4(2|2)_1 \geq 3$, ce qui démontre la proposition 3.5.

Il ne reste donc qu'à démontrer le lemme 3.4, qui montre simultanément la condition de $(2, 1)$ -irrationalité et établit l'inégalité cruciale pour la proposition 3.5.

Preuve.

Soit $B \in \mathfrak{A}_4(2)$ et (Y_1, Y_2) une base de B donnée par le lemme 2.8.

Comme $\binom{4}{2} = 6$, notons (η_1, \dots, η_6) les coordonnées de Plücker de B associées à la base (Y_1, Y_2) . D'après le lemme 2.8, on a $(\eta_1, \dots, \eta_6) \in \mathbb{Z}^6$ et

$$\text{pgcd}(\eta_1, \dots, \eta_6) = 1. \quad (3.5)$$

De plus, ce vecteur vérifie la relation de Plücker donnée par le théorème 2.6 :

$$\eta_1\eta_6 - \eta_2\eta_5 + \eta_3\eta_4 = 0. \quad (3.6)$$

Explicitons d'où vient la relation (3.6). On reprend les notations du théorème 2.6 et de la sous-section 2.1.1. On note $(\eta_K)_{K \in \Lambda(2,4)}$ les coordonnées de Plücker de B . On a d'après le théorème 2.6 que pour tout $I \in \Lambda(1,4)$ et pour tout $J = \{j_1 < j_2 < j_3\} \in \Lambda(3,4)$:

$$\sum_{\substack{1 \leq k \leq 3 \\ j_k \notin I}} (-1)^{k+\iota(I, \{j_k\})} \eta_{I \cup \{j_k\}} \eta_{J \setminus \{j_k\}} = 0.$$

En particulier, pour $I = \{1\}$ et $J = \{2, 3, 4\}$, on obtient

$$(-1)^{1+\iota(\{1\}, \{2\})} \eta_{\{1,2\}} \eta_{\{3,4\}} + (-1)^{2+\iota(\{1\}, \{3\})} \eta_{\{1,3\}} \eta_{\{2,4\}} + (-1)^{3+\iota(\{1\}, \{4\})} \eta_{\{1,4\}} \eta_{\{2,3\}} = 0,$$

soit

$$-\eta_{\{1,2\}} \eta_{\{3,4\}} + \eta_{\{1,3\}} \eta_{\{2,4\}} - \eta_{\{1,4\}} \eta_{\{2,3\}} = 0,$$

ce qui donne bien l'équation (3.6) en faisant correspondre les $\eta_{\{i,j\}}$ et les η_k grâce à l'ordre lexicographique sur $\Lambda(2,4)$:

$$(\eta_{\{1,2\}}, \eta_{\{1,3\}}, \eta_{\{1,4\}}, \eta_{\{2,3\}}, \eta_{\{2,4\}}, \eta_{\{3,4\}}) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5, \eta_6). \quad (3.7)$$

Notons M_ξ la matrice de $M_4(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont respectivement $X_\xi^{(1)}, X_\xi^{(2)}, Y_1, Y_2$. Remarquons que

$$A_\xi \cap B = \{0\} \iff \det M_\xi \neq 0.$$

On calcule alors le déterminant de M_ξ par un développement de Laplace par rapport aux deux premières colonnes (proposition 2.1 et exemple 2.2 avec la correspondance (3.7)), et on trouve :

$$\begin{aligned} \det M_\xi &= -\eta_6 + \eta_5\xi - \eta_4\sqrt{7-\xi^2} - \eta_3\sqrt{7-\xi^2} - \eta_2\xi + 7\eta_1 \\ &= -\eta_6 + 7\eta_1 + (\eta_5 - \eta_2)\xi + (-\eta_3 - \eta_4)\sqrt{7-\xi^2}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Supposons par l'absurde que $\det M_\xi = 0$, on a donc

$$-\eta_6 + 7\eta_1 + (\eta_5 - \eta_2)\xi + (-\eta_3 - \eta_4)\sqrt{7-\xi^2} = 0. \quad (3.9)$$

Or pour tout nombre algébrique $\xi \in]0, \sqrt{7}[$ de degré au moins égal à 3, on a

$$\dim_{\mathbb{Q}} \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(1, \xi, \sqrt{7-\xi^2}) = 3. \quad (3.10)$$

En effet, supposons par l'absurde qu'il existe $(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ tel que

$$x + y\xi + z\sqrt{7 - \xi^2} = 0. \quad (3.11)$$

Comme $\xi \notin \mathbb{Q}$, on peut supposer que $z \neq 0$. En posant $x' = x/z$ et $y' = y/z$, l'équation (3.11) se réécrit

$$(y'^2 + 1)\xi^2 + 2x'y'\xi + x'^2 - 7 = 0.$$

Or ξ n'est pas un nombre algébrique de degré inférieur ou égal à 2, et donc ne peut annuler le polynôme

$$(y'^2 + 1)X^2 + 2x'y'X + x'^2 - 7$$

de degré 2 à coefficients rationnels, ce qui établit l'indépendance linéaire sur \mathbb{Q} de $1, \xi, \sqrt{7 - \xi^2}$ pour tout nombre algébrique $\xi \in]0, \sqrt{7}[$ de degré au moins égal à 3.

Comme les η_i sont entiers, l'équation (3.9) sur les coordonnées de Plücker de B combinée avec l'indépendance linéaire (3.10), donne que pour tout $\xi \in]0, \sqrt{7}[$ algébrique de degré au moins 3, on a

$$\begin{cases} \eta_6 = 7\eta_1 \\ \eta_5 = \eta_2 \\ \eta_4 = -\eta_3. \end{cases} \quad (3.12)$$

Ainsi, la relation (3.6) de Plücker devient

$$\eta_2^2 + \eta_3^2 = 7\eta_1^2.$$

On regarde cette équation modulo 4 :

$$\eta_2^2 + \eta_3^2 \equiv 3\eta_1^2 \pmod{4}.$$

Or un carré est toujours congru à 0 ou 1 modulo 4, donc $4 \mid \eta_1^2$, donc $2 \mid \eta_1$. De plus, $4 \mid \eta_2^2$ et $4 \mid \eta_3^2$, donc $2 \mid \eta_2$ et $2 \mid \eta_3$. Avec les équations (3.12), on en déduit que 2 divise tous les η_i , ce qui est absurde car $\text{pgcd}(\eta_1, \dots, \eta_6) = 1$ d'après (3.5).

On a donc $\det M_\xi \neq 0$, et ainsi $A_\xi \cap B = \{0\}$ pour tout nombre algébrique $\xi \in]0, \sqrt{7}[$ de degré au moins égal à 3, ce qui établit la condition de (2, 1)-irrationalité.

Il reste à établir l'inégalité (3.4). Pour cela, les deux points de vue sur la hauteur seront utilisés de façon combinée grâce au lemme 3.1.

Comme la base (Y_1, Y_2) de B donnée par le lemme 2.8 est aussi une \mathbb{Z} -base de $B \cap \mathbb{Z}^4$, on peut utiliser le lemme 3.1 qui donne

$$\varphi(A_\xi, B) = |\det(M_\xi)| \frac{c_1}{H(B)} \quad (3.13)$$

pour une certaine constante $c_1 > 0$ ne dépendant que de A_ξ .

Or d'après l'équation (3.8), on a

$$|\det(M_\xi)| = \left| -\eta_6 + 7\eta_1 + (\eta_5 - \eta_2)\xi + (-\eta_3 - \eta_4)\sqrt{7 - \xi^2} \right|,$$

et il reste donc à minorer cette quantité en fonction de la hauteur de B .

Comme les coordonnées de Plücker $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_6)$ de B sont entières et premières entre elles dans leur ensemble (équation (3.5)), on peut utiliser la définition 1.5 de la hauteur :

$$H(B)^2 = \sum_{i=1}^6 \eta_i^2 = \|\eta\|^2, \quad (3.14)$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne canonique sur \mathbb{R}^6 , ce qui va permettre de minorer $|\det(M_\xi)|$ en fonction de $H(B)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Supposons désormais que ξ soit un nombre algébrique tel que le triplet de nombres algébriques $(1, \xi, \sqrt{7 - \xi^2})$ soit \mathbb{Q} -libre (*i.e.* tel que la relation (3.10) soit vérifiée).

Alors la proposition 2.28 s'applique, et donne une constante $c_2 > 0$ ne dépendant que de A_ξ et de ε , telle que pour tout $q = (a, b, c) \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$:

$$\left| a\sqrt{7 - \xi^2} + b\xi + c \right| \geq c_2 \|q\|^{-2-\varepsilon}. \quad (3.15)$$

On remarque que pour $q = (-\eta_3 - \eta_4, \eta_5 - \eta_2, -\eta_6 + 7\eta_1)$, on a $q \neq (0, 0, 0)$ sinon le système (3.12) serait vérifié, et on a vu que cela était impossible. De plus,

$$\begin{aligned} \|q\|^2 &= |\eta_3^2 + \eta_4^2 + 2\eta_3\eta_4 + \eta_5^2 + \eta_2^2 - 2\eta_2\eta_5 + \eta_6^2 + 49\eta_1^2 - 14\eta_1\eta_6| \\ &\leq 49(\eta_1^2 + \dots + \eta_6^2) + 18 \cdot \max_{1 \leq i \leq 6} (|\eta_i|)^2 \\ &\leq 67 \|\eta\|^2. \end{aligned}$$

La minoration (3.15) donne donc

$$|\det(M_\xi)| \geq c_3 \|\eta\|^{-2-\varepsilon}$$

pour une certaine constante $c_3 > 0$ qui ne dépend que de A_ξ et de ε .

En combinant cette minoration avec (3.13) et (3.14), on obtient une constante $c_4 > 0$ (qui ne dépend que de A_ξ et de ε) telle que

$$\varphi(A_\xi, B) \geq \frac{c_4}{H(B)^{3+\varepsilon}},$$

ce qui termine la preuve du lemme 3.4. □

Remarque 3.8 En appliquant le lemme 3.2 avec $j = 2$, le lemme 3.4 permet de montrer de la même façon que

$$\dot{\mu}_4(2|2)_2 \leq \frac{3}{2},$$

mais le théorème 1.17 donne déjà que

$$\dot{\mu}_4(2|2)_2 = 1.$$

3.3 Dans \mathbb{R}^5

Maintenant que le cas de \mathbb{R}^4 est complètement résolu, on s'intéresse au prochain cas encore ouvert :

$$(n, d, e, j) = (5, 3, 2, 1).$$

D'après les théorèmes 1.15 et 1.17, on sait déjà que

$$4 \leq \dot{\mu}_5(3|2)_1 \leq 7.$$

Sans déterminer complètement la valeur de $\dot{\mu}_5(3|2)_1$, on améliore cet encadrement dans le théorème suivant :

Théorème 3.9 On a

$$\dot{\mu}_5(3|2)_1 \leq 6.$$

3.3.1 Construction de sous-espaces mal approchés de $\mathfrak{J}_5(3, 2)_1$

Comme dans la section 3.2 sur \mathbb{R}^4 , construisons ici explicitement des sous-espaces de \mathbb{R}^5 de dimension 3 vérifiant simultanément les deux conditions suivantes :

- être $(2, 1)$ -irrationnels,
- être mal approchés par les plans rationnels de \mathbb{R}^5 .

Soit ζ_3 un nombre réel algébrique tel que

$$[\mathbb{Q}(\zeta_3) : \mathbb{Q}] \geq 33.$$

Considérons les quatre nombres algébriques suivants :

$$\zeta_1 = -\frac{112 \zeta_3^4 - 196 \zeta_3^3 - (42 \sqrt{2} \zeta_3^3 - 17 \sqrt{2} \zeta_3^2 + 13 \sqrt{2} \zeta_3) \sqrt{4 \zeta_3 - 5} \sqrt{\zeta_3 - 1} + 88 \zeta_3^2 - 30 \zeta_3 + 6}{4 (10 \zeta_3^4 - 7 \zeta_3^3 - (4 \sqrt{2} \zeta_3^3 + 3 \sqrt{2} \zeta_3^2 + \sqrt{2}) \sqrt{4 \zeta_3 - 5} \sqrt{\zeta_3 - 1} - 10 \zeta_3^2 + 5 \zeta_3 - 2)},$$

$$\zeta_2 = -\frac{52 \zeta_3^4 - 154 \zeta_3^3 - (18 \sqrt{2} \zeta_3^3 - 35 \sqrt{2} \zeta_3^2 + 13 \sqrt{2} \zeta_3 - 6 \sqrt{2}) \sqrt{4 \zeta_3 - 5} \sqrt{\zeta_3 - 1} + 148 \zeta_3^2 - 60 \zeta_3 + 18}{4 (10 \zeta_3^4 - 7 \zeta_3^3 - (4 \sqrt{2} \zeta_3^3 + 3 \sqrt{2} \zeta_3^2 + \sqrt{2}) \sqrt{4 \zeta_3 - 5} \sqrt{\zeta_3 - 1} - 10 \zeta_3^2 + 5 \zeta_3 - 2)},$$

$$\zeta_4 = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{4\zeta_3 - 5}\sqrt{\zeta_3 - 1}\zeta_3^2 - 6\zeta_3^3 + 3\zeta_3^2 + 3\zeta_3}{2(\zeta_3^2 - 1)},$$

$$\zeta_5 = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{4\zeta_3 - 5}\sqrt{\zeta_3 - 1}\zeta_3 - 3\zeta_3^2 + 3\zeta_3}{2(\zeta_3^2 - 1)},$$

en supposant $\zeta_3 \geq 5/4$ de sorte à ce que toutes les racines soient bien définies, et ζ_3 suffisamment grand de sorte à ce que les dénominateurs ne soient pas nuls (ceux-ci ne s'annulent qu'en un nombre fini de valeurs). En étudiant les polynômes qui définissent les dénominateurs, on pourrait montrer que $\zeta_3 \geq 5/4$ suffit pour que les dénominateurs soient non nuls, mais cela ne sera pas utile ici.

On pose alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = 1 \\ \xi_2 = \zeta_2 + \zeta_5 \\ \xi_3 = -\zeta_1 \\ \xi_4 = 1 + \zeta_1 + \zeta_5 \\ \xi_5 = \zeta_2 \\ \xi_6 = 2\zeta_2 - \zeta_5 \\ \xi_7 = -\zeta_3 \\ \xi_8 = \zeta_3 \\ \xi_9 = \zeta_4 \\ \xi_{10} = \zeta_5 \end{array} \right. \quad (3.16)$$

et

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{10}). \quad (3.17)$$

Tout ceci permet de définir la famille de sous-espaces annoncée grâce au lemme suivant (qui sera démontré, ainsi que les lemmes 3.11 et 3.12 et la proposition 3.13, dans la sous-section 3.3.2).

Lemme 3.10 Il existe un sous-espace vectoriel A_ξ de \mathbb{R}^5 de dimension 3 dont le vecteur ξ est un représentant des coordonnées de Plücker.

Maintenant que les sous-espaces A_ξ sont définis, il reste à montrer, comme dans la section précédente, qu'ils vérifient la condition de $(2, 1)$ -irrationalité et qu'ils sont mal approchés par les plans rationnels de \mathbb{R}^5 .

Pour cela, on montre d'abord le lemme technique suivant. On rappelle que $\zeta_3 \geq 5/4$ a été défini comme un nombre réel suffisamment grand, et algébrique de degré supérieur à 33, ce qu'on utilise ici.

Lemme 3.11 On a

$$\dim_{\mathbb{Q}} \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(1, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5) = 6.$$

Avec ce bagage, on peut alors énoncer des résultats qui ressemblent à ceux de la section précédente dans \mathbb{R}^4 .

Lemme 3.12 Pour tout ξ défini précédemment en (3.17), le sous-espace A_{ξ} associé à ξ par le lemme 3.10 vérifie

$$A_{\xi} \in \mathfrak{J}_5(3, 2)_1. \quad (3.18)$$

De plus,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists c > 0, \quad \forall B \in \mathfrak{A}_5(2), \quad \varphi(A_{\xi}, B) \geq \frac{c}{H(B)^{6+\varepsilon}}.$$

A fortiori, la condition de (2, 2)-irrationalité étant plus faible, le lemme 3.12 montre aussi que pour tout ξ , $A_{\xi} \in \mathfrak{J}_5(3, 2)_2$. De plus, le lemme 3.2 (appliqué avec $j = 1$) montre que le lemme 3.12 est aussi vrai en remplaçant $\varphi(A_{\xi}, B)$ par $\psi_1(A_{\xi}, B)$.

La proposition suivante permet de démontrer le théorème 3.9, et ainsi de s'approcher un peu plus d'une réponse au problème 1.12 dans \mathbb{R}^5 .

Proposition 3.13 Pour tout ξ défini en (3.17), le sous-espace A_{ξ} associé à ξ par le lemme 3.10 vérifie

$$\mu_5(A_{\xi}|2)_1 \leq 6.$$

3.3.2 Les preuves

On démontre ici les résultats énoncés sans démonstration dans la sous-section 3.3.1. Comme dans \mathbb{R}^4 (voir sous-section 3.2.2), on déduit immédiatement la proposition 3.13 et le théorème 3.9 du lemme 3.12.

Commençons par démontrer le lemme 3.10 montrant que le sous-espace A_{ξ} est bien défini.

Preuve.

On remarque que $\binom{5}{3} = 10$. Il existe un sous-espace ayant ξ pour coordonnées de Plücker si, et seulement si, les coordonnées de ξ vérifient les relations de Plücker (données par le théorème 2.6) pour un sous-espace de dimension 3 de \mathbb{R}^5 , *i.e.*

$$\begin{cases} \xi_2 \xi_5 = \xi_3 \xi_4 + \xi_1 \xi_6 \\ \xi_2 \xi_8 = \xi_3 \xi_7 + \xi_1 \xi_9 \\ \xi_4 \xi_8 = \xi_5 \xi_7 + \xi_1 \xi_{10} \\ \xi_4 \xi_9 = \xi_6 \xi_7 + \xi_2 \xi_{10} \\ \xi_5 \xi_9 = \xi_6 \xi_8 + \xi_3 \xi_{10}. \end{cases} \quad (3.19)$$

Explicitons d'où viennent les relations (3.19). On reprend les notations du théorème 2.6 et de la sous-section 2.1.1. On note $(\xi_K)_{K \in \Lambda(3,5)}$ les coordonnées de Plücker de B . On a d'après le théorème 2.6 que pour tout $I \in \Lambda(2,5)$ et pour tout $J = \{j_1 < j_2 < j_3 < j_4\} \in \Lambda(4,5)$:

$$\sum_{\substack{1 \leq k \leq 4 \\ j_k \notin I}} (-1)^{k+\iota(I, \{j_k\})} \xi_{I \cup \{j_k\}} \xi_{J \setminus \{j_k\}} = 0.$$

Par exemple, pour $I = \{1, 2\}$ et $J = \{2, 3, 4, 5\}$, on obtient

$$(-1)^{2+\iota(\{1,2\}, \{3\})} \xi_{\{1,2,3\}} \xi_{\{2,4,5\}} + (-1)^{3+\iota(\{1,2\}, \{4\})} \xi_{\{1,2,4\}} \xi_{\{2,3,5\}} + (-1)^{4+\iota(\{1,2\}, \{5\})} \xi_{\{1,2,5\}} \xi_{\{2,3,4\}} = 0,$$

soit

$$\xi_{\{1,2,3\}} \xi_{\{2,4,5\}} - \xi_{\{1,2,4\}} \xi_{\{2,3,5\}} + \xi_{\{1,2,5\}} \xi_{\{2,3,4\}} = 0,$$

ce qui donne bien la deuxième équation de (3.19) en faisant correspondre les $\xi_{\{i,j,k\}}$ et les ξ_ℓ avec l'ordre lexicographique sur $\Lambda(3,5)$:

$$\begin{aligned} & (\xi_{\{1,2,3\}}, \xi_{\{1,2,4\}}, \xi_{\{1,2,5\}}, \xi_{\{1,3,4\}}, \xi_{\{1,3,5\}}, \xi_{\{1,4,5\}}, \xi_{\{2,3,4\}}, \xi_{\{2,3,5\}}, \xi_{\{2,4,5\}}, \xi_{\{3,4,5\}}) \\ & = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7, \xi_8, \xi_9, \xi_{10}). \end{aligned}$$

Les quatre autres équations de (3.19) s'obtiennent de façon similaire.

On vérifie que ξ vérifie le système (3.19) grâce au logiciel de calcul formel SageMath, avec les commandes suivantes (les variables `tmp_zi` stockent les ζ_i comme définis en début de section) :

```
E_1=xi_2*xi_5-xi_3*xi_4-xi_1*xi_6;
E_1=calc(E_1.subs(xi_1=1).subs(xi_2=zeta_2+zeta_5).subs(xi_3=-zeta_1)
.subs(xi_4=1+zeta_1+zeta_5).subs(xi_5=zeta_2).subs(xi_6=2*zeta_2-zeta_5)
.subs(xi_7=-zeta_3).subs(xi_8=zeta_3).subs(xi_9=zeta_4).subs(xi_10=zeta_5)
.subs(zeta_1=tmp_z1).subs(zeta_2=tmp_z2).subs(zeta_4=tmp_z4));
```

```
E_2=xi_2*xi_8-xi_3*xi_7-xi_1*xi_9;
E_2=calc(E_2.subs(xi_1=1).subs(xi_2=zeta_2+zeta_5).subs(xi_3=-zeta_1)
.subs(xi_4=1+zeta_1+zeta_5).subs(xi_5=zeta_2).subs(xi_6=2*zeta_2-zeta_5)
.subs(xi_7=-zeta_3).subs(xi_8=zeta_3).subs(xi_9=zeta_4).subs(xi_10=zeta_5)
.subs(zeta_1=tmp_z1).subs(zeta_2=tmp_z2).subs(zeta_4=tmp_z4));
```

```
E_3=xi_4*xi_8-xi_5*xi_7-xi_1*xi_10;
E_3=calc(E_3.subs(xi_1=1).subs(xi_2=zeta_2+zeta_5).subs(xi_3=-zeta_1)
.subs(xi_4=1+zeta_1+zeta_5).subs(xi_5=zeta_2).subs(xi_6=2*zeta_2-zeta_5)
.subs(xi_7=-zeta_3).subs(xi_8=zeta_3).subs(xi_9=zeta_4).subs(xi_10=zeta_5)
.subs(zeta_1=tmp_z1).subs(zeta_2=tmp_z2).subs(zeta_4=tmp_z4));
```

```
E_4=xi_4*xi_9-xi_6*xi_7-xi_2*xi_10;
```

```
E_4=calc(E_4.subs(xi_1=1).subs(xi_2=zeta_2+zeta_5).subs(xi_3=-zeta_1)
.subs(xi_4=1+zeta_1+zeta_5).subs(xi_5=zeta_2).subs(xi_6=2*zeta_2-zeta_5)
.subs(xi_7=-zeta_3).subs(xi_8=zeta_3).subs(xi_9=zeta_4).subs(xi_10=zeta_5)
.subs(zeta_1=tmp_z1).subs(zeta_2=tmp_z2).subs(zeta_4=tmp_z4));
```

```
E_5=xi_5*xi_9-xi_6*xi_8-xi_3*xi_10;
E_5=calc(E_5.subs(xi_1=1).subs(xi_2=zeta_2+zeta_5).subs(xi_3=-zeta_1)
.subs(xi_4=1+zeta_1+zeta_5).subs(xi_5=zeta_2).subs(xi_6=2*zeta_2-zeta_5)
.subs(xi_7=-zeta_3).subs(xi_8=zeta_3).subs(xi_9=zeta_4).subs(xi_10=zeta_5)
.subs(zeta_1=tmp_z1).subs(zeta_2=tmp_z2).subs(zeta_4=tmp_z4));
```

```
[E_1,E_2,E_3,E_4,E_5]
```

qui renvoie

$$[0, 0, 0, 0, 0]$$

comme espéré. □

Les sous-espaces A_ξ étant bien définis, on démontre le lemme technique 3.11.

Preuve.

Soit $(a_0, \dots, a_5) \in \mathbb{Q}^6$ tel que

$$\sum_{i=0}^5 a_i \zeta_i = 0$$

où on a posé $\zeta_0 := 1$. On veut montrer que les a_i sont tous nuls. Pour cela, travaillons l'expression grâce au logiciel SageMath. Après avoir écrit une fonction `calc` pour aider SageMath à simplifier les expressions, on chasse les dénominateurs avec les lignes de calculs suivantes :

```
def calc(X):
    return (expand(numerator(expand(X)))/expand(denominator(expand(X))))
    .canonicalize_radical()
```

```
D=calc(denominator(zeta_1)*denominator(zeta_2)*denominator(zeta_3)
*denominator(zeta_4)*denominator(zeta_5));
D_1=calc(denominator(zeta_2)*denominator(zeta_3)*denominator(zeta_4)
*denominator(zeta_5));
D_2=calc(denominator(zeta_1)*denominator(zeta_3)*denominator(zeta_4)
*denominator(zeta_5));
D_3=calc(denominator(zeta_1)*denominator(zeta_2)*denominator(zeta_4)
*denominator(zeta_5));
D_4=calc(denominator(zeta_1)*denominator(zeta_2)*denominator(zeta_3)
*denominator(zeta_5));
D_5=calc(denominator(zeta_1)*denominator(zeta_2)*denominator(zeta_3)
*denominator(zeta_4));
```


E=calc(a_0*D+a_1*(zeta_1)*D_1+a_2*(zeta_2)*D_2+a_3*(zeta_3)*D_3+a_4*(zeta_4)*D_4+a_5*(zeta_5)*D_5);
E;

Ceci donne

$$0 = \sum_{i=0}^5 a_i \zeta_i = \frac{P_1(\zeta_3) + P_2(\zeta_3) \sqrt{P_3(\zeta_3)}}{10\zeta_3^3 + 7\zeta_3 - 2 - (4\zeta_3^2 - \zeta_3 + 1) \sqrt{P_3(\zeta_3)}} \quad (3.20)$$

avec $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{Q}[X]$:

$$\begin{aligned} P_1 = & 77440 a_3 X^{16} + 64 (1210 a_0 - 3127 a_3) X^{15} - 32 (6254 a_0 + 3263 a_3 - 5342 a_4) X^{14} \\ & - 16 (6526 a_0 - 40479 a_3 + 35080 a_4 - 7054 a_5) X^{13} \\ & + 16 (40479 a_0 - 17471 a_3 + 22640 a_4 - 25699 a_5) X^{12} \\ & - 8 (34942 a_0 - 308 a_1 - 137 a_2 + 76708 a_3 - 77312 a_4 - 38023 a_5) X^{11} \\ & - 4 (153416 a_0 + 1942 a_1 + 1246 a_2 - 155896 a_3 + 246351 a_4 - 70711 a_5) X^{10} \\ & + 2 (311792 a_0 + 2308 a_1 + 3337 a_2 - 8368 a_3 + 194376 a_4 - 377760 a_5) X^9 \\ & - 2 (8368 a_0 - 4403 a_1 - 812 a_2 + 158704 a_3 - 101094 a_4 - 256674 a_5) X^8 \\ & - 2 (158704 a_0 + 6646 a_1 + 5797 a_2 - 129152 a_3 + 189576 a_4 + 17808 a_5) X^7 \\ & + 2 (129152 a_0 + 2335 a_1 + 4786 a_2 - 27088 a_3 + 122274 a_4 - 121002 a_5) X^6 \\ & - 2 (27088 a_0 - 1556 a_1 + 337 a_2 + 25192 a_3 + 37696 a_4 - 122400 a_5) X^5 \\ & - 2 (25192 a_0 + 2349 a_1 + 2088 a_2 - 24168 a_3 - 4210 a_4 + 65986 a_5) X^4 \\ & + 2 (24168 a_0 + 1434 a_1 + 1977 a_2 - 11984 a_3 + 3880 a_4 + 24652 a_5) X^3 \\ & - 2 (11984 a_0 + 499 a_1 + 970 a_2 - 3088 a_3 + 1468 a_4 + 5516 a_5) X^2 \\ & + 8 (772 a_0 + 29 a_1 + 68 a_2 - 136 a_3 + 102 a_4 + 212 a_5) X - 1088 a_0 - 12 a_1 - 96 a_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2 = & -27392 a_3 X^{15} - 64 (428 a_0 - 623 a_3) X^{14} + 32 (1246 a_0 + 2546 a_3 - 1889 a_4) X^{13} \\ & + 16 (5092 a_0 - 8569 a_3 + 8149 a_4 - 2494 a_5) X^{12} \\ & - 8 (17138 a_0 + 6778 a_3 - 2257 a_4 - 12560 a_5) X^{11} \\ & - 4 (13556 a_0 + 217 a_1 + 97 a_2 - 38960 a_3 + 49453 a_4 + 5626 a_5) X^{10} \\ & + 4 (38960 a_0 + 445 a_1 + 331 a_2 - 11640 a_3 + 31708 a_4 - 31222 a_5) X^9 \\ & - (46560 a_0 - 363 a_1 + 873 a_2 + 46752 a_3 - 4664 a_4 - 126940 a_5) X^8 \\ & - 4 (11688 a_0 + 683 a_1 + 386 a_2 - 15000 a_3 + 16585 a_4 + 9823 a_5) X^7 \\ & + (60000 a_0 + 1611 a_1 + 2367 a_2 - 23360 a_3 + 59236 a_4 - 31312 a_5) X^6 \\ & - 2 (11680 a_0 - 93 a_1 + 369 a_2 + 3392 a_3 + 10088 a_4 - 25172 a_5) X^5 \\ & - (6784 a_0 + 845 a_1 + 593 a_2 - 9904 a_3 - 4256 a_4 + 30148 a_5) X^4 \\ & + 4 (2476 a_0 + 176 a_1 + 203 a_2 - 1540 a_3 + 469 a_4 + 3221 a_5) X^3 \\ & - (6160 a_0 + 255 a_1 + 483 a_2 - 1600 a_3 + 664 a_4 + 3008 a_5) X^2 \\ & + 2 (800 a_0 + 31 a_1 + 73 a_2 - 176 a_3 + 132 a_4 + 268 a_5) X - 352 a_0 - 6 a_1 - 30 a_2, \end{aligned}$$

$$P_3 = 8X^2 - 18X + 10.$$

Ainsi, on a

$$P_1(\zeta_3) + P_2(\zeta_3)\sqrt{P_3(\zeta_3)} = 0,$$

et le nombre ζ_3 est racine du polynôme

$$P = P_1^2 - P_2^2 P_3 \in \mathbb{Q}[X]$$

de degré au plus 32.

Or ζ_3 a été défini comme un nombre réel algébrique tel que

$$[\mathbb{Q}(\zeta_3) : \mathbb{Q}] \geq 33.$$

Ainsi, comme les coefficients de P sont rationnels et que ζ_3 est racine de P , on a

$$P = 0.$$

Les 4 équations données par les monômes de degrés 32, 30, 28 et 26 forment alors un système échelonné qui donne

$$a_0 = a_3 = a_4 = a_5 = 0.$$

Considérons enfin l'équation donnée par le monôme de degré 22 :

$$14a_1^2 + 4a_1a_2 - a_2^2 = 0,$$

ce qui donne

$$a_1 = a_2 \frac{-2 \pm 3\sqrt{2}}{14}.$$

Comme $(a_1, a_2) \in \mathbb{Q}^2$, on a $a_1 = a_2 = 0$, et finalement on a bien obtenu

$$\forall i \in \{0, \dots, 5\}, \quad a_i = 0,$$

soit

$$\dim_{\mathbb{Q}} \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(1, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5) = 6. \quad \square$$

On peut désormais démontrer le lemme 3.12.

Preuve.

Soient $B \in \mathfrak{R}_5(2)$ et (Y_1, Y_2) une base de B donnée par le lemme 2.8. Comme $\binom{5}{2} = 10$, notons $(\eta_1, \dots, \eta_{10})$ les coordonnées de Plücker de B associées à la base (Y_1, Y_2) . D'après le lemme 2.8, on a $(\eta_1, \dots, \eta_{10}) \in \mathbb{Z}^{10}$ et

$$\text{pgcd}(\eta_1, \dots, \eta_{10}) = 1. \quad (3.21)$$

De plus, ce vecteur vérifie les relations de Plücker données par le théorème 2.6 (déjà explicitées page 55, en dessous du système (3.19)) :

$$\begin{cases} \eta_2\eta_5 = \eta_3\eta_4 + \eta_1\eta_6 \\ \eta_2\eta_8 = \eta_3\eta_7 + \eta_1\eta_9 \\ \eta_4\eta_8 = \eta_5\eta_7 + \eta_1\eta_{10} \\ \eta_4\eta_9 = \eta_6\eta_7 + \eta_2\eta_{10} \\ \eta_5\eta_9 = \eta_6\eta_8 + \eta_3\eta_{10}. \end{cases} \quad (3.22)$$

Soit $(X_\xi^{(1)}, X_\xi^{(2)}, X_\xi^{(3)})$ une base de A_ξ associée à ξ , le vecteur représentant de ses coordonnées de Plücker dont on s'est servi pour définir A_ξ . Notons M_ξ la matrice de $M_5(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont respectivement $X_\xi^{(1)}, X_\xi^{(2)}, X_\xi^{(3)}, Y_1, Y_2$.

Remarquons que

$$A_\xi \cap B = \{0\} \iff \det M_\xi \neq \{0\}.$$

On calcule le déterminant de M par un développement de Laplace par rapport aux trois premières colonnes (corollaire 2.7), et on trouve

$$\det M_\xi = \xi_1\eta_{10} - \xi_2\eta_9 + \xi_3\eta_8 + \xi_4\eta_7 - \xi_5\eta_6 + \xi_6\eta_5 - \xi_7\eta_4 + \xi_8\eta_3 - \xi_9\eta_2 + \xi_{10}\eta_1.$$

Supposons par l'absurde que $\det M_\xi = 0$, *i.e.* supposons par l'absurde que $A_\xi \cap B \neq \{0\}$. On a alors en utilisant les relations (3.16) entre les ξ_i et les ζ_i que

$$\begin{aligned} 0 &= \det(M_\xi) \\ &= \eta_{10} - (\zeta_2 + \zeta_5)\eta_9 - \zeta_1\eta_8 + (1 + \zeta_1 + \zeta_5)\eta_7 - \zeta_2\eta_6 + (2\zeta_2 - \zeta_5)\eta_5 + \zeta_3\eta_4 + \zeta_3\eta_3 - \zeta_4\eta_2 + \zeta_5\eta_1 \\ &= \eta_{10} + \eta_7 + (-\eta_8 + \eta_7)\zeta_1 + (-\eta_9 - \eta_6 + 2\eta_5)\zeta_2 + (\eta_4 + \eta_3)\zeta_3 - \eta_2\zeta_4 + (-\eta_9 + \eta_7 - \eta_5 + \eta_1)\zeta_5. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Or d'après le lemme 3.11,

$$\dim_{\mathbb{Q}} \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(1, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5) = 6,$$

et les η_i sont des nombres rationnels, donc

$$\begin{cases} \eta_{10} = -\eta_7 \\ \eta_8 = \eta_7 \\ \eta_6 = -\eta_9 + 2\eta_5 \\ \eta_4 = -\eta_3 \\ \eta_2 = 0 \\ \eta_1 = \eta_9 - \eta_7 + \eta_5. \end{cases} \quad (3.24)$$

Avec les relations (3.24) nouvellement établies, on réécrit les relations de Plücker pour les η_i , qui de (3.22) deviennent

$$\begin{cases} \eta_3^2 - 2\eta_5^2 + 2\eta_5\eta_7 - \eta_5\eta_9 - \eta_7\eta_9 + \eta_9^2 = 0 \\ -\eta_3\eta_7 - \eta_5\eta_9 + \eta_7\eta_9 - \eta_9^2 = 0 \\ -\eta_3\eta_7 - \eta_7^2 + \eta_7\eta_9 = 0 \\ -2\eta_5\eta_7 - \eta_3\eta_9 + \eta_7\eta_9 = 0 \\ \eta_3\eta_7 - 2\eta_5\eta_7 + \eta_5\eta_9 + \eta_7\eta_9 = 0. \end{cases} \quad (3.25)$$

Il reste à montrer qu'il n'existe pas de solution rationnelle non nulle $(\eta_3, \eta_5, \eta_7, \eta_9)$ à ce système polynomial.

On appelle I l'idéal de $\mathbb{Q}[\eta_3, \eta_5, \eta_7, \eta_9]$ engendré par les équations du système (3.25). Avec la théorie des idéaux d'élimination (à laquelle une introduction peut être trouvée page 392 de [Lan02]), on regarde l'idéal J dans lequel on a éliminé η_3 , puis η_5 . Autrement dit,

$$J = I \cap \mathbb{Q}[\eta_3, \eta_5].$$

Pour cela on se sert encore une fois du logiciel de calcul formel SageMath, dans lequel les instructions suivantes sont saisies :

```
L_1=eta_3^2-2*eta_5^2+2*eta_5*eta_7-eta_5*eta_9-eta_7*eta_9+eta_9^2;
L_2=-eta_3*eta_7-eta_5*eta_9+eta_7*eta_9-eta_9^2;
L_3=-eta_3*eta_7-eta_7^2+eta_7*eta_9;
L_4=-2*eta_5*eta_7-eta_3*eta_9+eta_7*eta_9;
L_5=eta_3*eta_7-2*eta_5*eta_7+eta_5*eta_9+eta_7*eta_9;
```

```
R.<eta_3,eta_5,eta_7,eta_9>=QQ[];
```

```
I=R.ideal(L_1,L_2,L_3,L_4,L_5);
```

```
J=I.elimination_ideal(eta_3).elimination_ideal(eta_5).
```

```
J
```

ce qui renvoie l'idéal

$$J = (2\eta_7^3 - 4\eta_7\eta_9^2 + \eta_9^3).$$

Ainsi, toute solution de (3.25) se projette en une solution de

$$2\eta_7^3 - 4\eta_7\eta_9^2 + \eta_9^3 = 0. \quad (3.26)$$

Si $\eta_9 = 0$, alors $\eta_7 = 0$. Sinon on peut poser $X = \eta_7/\eta_9$, et l'équation (3.26) devient

$$P(X) = 2X^3 - 4X + 1 = 0.$$

Supposons qu'il existe $p/q \in \mathbb{Q}^*$ (0 n'est pas racine de P) une racine rationnelle non nulle de P sous forme irréductible. On a alors

$$2p^3 - 4pq^2 + q^3 = 0.$$

Comme $\text{pgcd}(p, q) = 1$, on a d'après le lemme de Gauss que $p \mid 1$ et $q \mid 2$. On vérifie alors que

$$P(-1), P(-1/2), P(1/2), P(1) \neq 0.$$

Ainsi, on a $\eta_7 = \eta_9 = 0$.

La première équation de (3.25) devient alors

$$\eta_3^2 = 2\eta_5^2,$$

et donc $\eta_3 = \eta_5 = 0$ car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Finalement, en utilisant les équations (3.24), on obtient

$$\forall i \in \{1, \dots, 10\}, \quad \eta_i = 0,$$

ce qui est absurde car les η_i sont les coordonnées de Plücker d'un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^5 de dimension 2.

Il n'existe donc pas de plan B rationnel tel que $\det M_\xi \neq 0$, *i.e.* tel que $A_\xi \cap B \neq \{0\}$. Cela montre que

$$A_\xi \in \mathfrak{J}_5(3, 2)_1$$

et établit (3.18), la première partie du lemme 3.12.

Comme la base (Y_1, Y_2) de B donnée par le lemme 2.8 est aussi une \mathbb{Z} -base de $B \cap \mathbb{Z}^n$, on peut utiliser le lemme 3.1 qui donne

$$\varphi(A_\xi, B) = |\det(M_\xi)| \frac{c_1}{H(B)} \tag{3.27}$$

pour une certaine constante $c_1 > 0$ ne dépendant que de A_ξ . Or d'après l'équation (3.23), on a

$$\begin{aligned} & |\det(M_\xi)| \\ &= |\eta_1 - \eta_4 + (-\eta_4 - \eta_3)\zeta_1 + (-2\eta_6 + \eta_5 - \eta_2)\zeta_2 + (\eta_8 - \eta_7)\zeta_3 - \eta_9\zeta_4 + (\eta_{10} + \eta_6 - \eta_4 - \eta_2)\zeta_5|, \end{aligned}$$

et il reste donc à minorer cette quantité en fonction de la hauteur de B .

Comme les coordonnées de Plücker $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{10})$ de B sont entières et premières entre elles (équation (3.21)), on peut utiliser la définition 1.5 de la hauteur :

$$H(B)^2 = \sum_{i=1}^{10} \eta_i^2 = \|\eta\|^2,$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique sur \mathbb{R}^{10} , ce qui va permettre de minorer $|\det(M_\xi)|$ en fonction de la hauteur de B .

Soit $\varepsilon > 0$.

Comme d'après le lemme 3.11 on a

$$\dim_{\mathbb{Q}} \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(1, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5) = 6$$

et que ces 6 nombres sont des réels algébriques, la proposition 2.28 donne une constante $c_2 > 0$ ne dépendant que de A_ξ et de ε , telle que

$$\forall q = (a_0, \dots, a_5) \in \mathbb{Z}^6 \setminus \{(0, 0, 0, 0, 0, 0)\}, \quad \left| \sum_{i=0}^5 a_i \zeta_i \right| \geq c_2 \|q\|^{-5-\varepsilon}. \quad (3.28)$$

Remarquons que pour

$$q = (\eta_1 - \eta_4, -\eta_4 - \eta_3, -2\eta_6 + \eta_5 - \eta_2, \eta_8 - \eta_7, -\eta_9, \eta_{10} + \eta_6 - \eta_4 - \eta_2),$$

on a $q \neq (0, 0, 0, 0, 0, 0)$, sinon le système (3.24) serait vérifié et on a déjà établi que cela était impossible. De plus,

$$\|q\|^2 \leq 5(\eta_1^2 + \dots + \eta_{10}^2) + 24 \cdot \max_{1 \leq i \leq 10} (|\eta_i|)^2 \leq 29 \|\eta\|^2.$$

La minoration (3.28) donne donc

$$|\det(M_\xi)| \geq c_3 \|\eta\|^{-5-\varepsilon}$$

pour une certaine constante $c_3 > 0$ qui ne dépend que de A_ξ et de ε .

En combinant cette minoration avec (3.27), on obtient une constante $c_4 > 0$ (qui ne dépend que de A_ξ et de ε) telle que

$$\varphi(A_\xi, B) \geq \frac{c_4}{H(B)^{6+\varepsilon}},$$

ce qui termine la preuve du lemme 3.12. □

Remarque 3.14 En appliquant le lemme 3.2 avec $j = 2$, le lemme 3.12 permet de montrer de la même façon que

$$\dot{\mu}_6(3|2)_2 \leq \frac{6}{2} = 3,$$

mais on sait déjà grâce au théorème 1.17 que $\dot{\mu}_6(3|2)_2 \leq 5/4$.

3.4 Commentaires généraux

Il est probable que cette méthode s'adapte à d'autres cas particuliers et permette de diminuer certaines majorations de Schmidt. Cependant, dans chaque cas particulier des calculs de plus en plus lourds semblent nécessaires. Dans le cas de \mathbb{R}^5 , toute la difficulté était de construire un sous-espace A_ξ suffisamment compliqué pour que le système (3.25) n'ait pas de solution rationnelle non triviale – ce qui implique que $A_\xi \in \mathfrak{I}_5(3, 2)_1$ – mais aussi suffisamment simple pour arriver à montrer effectivement que ce système n'a pas de solution rationnelle non triviale.

Résumons l'idée globale des preuves développées dans les sections 3.2 et 3.3. On cherche à construire un sous-espace A qui vérifie les deux conditions suivantes qui s'opposent :

- avoir *beaucoup* de coordonnées de Plücker linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} pour que A soit $(e, 1)$ -irrationnel ;
- avoir *peu* de coordonnées de Plücker linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} pour obtenir le meilleur exposant possible grâce à la proposition 2.28.

C'est tout l'équilibre entre ces deux conditions qui est au cœur de cette méthode.

Pour montrer que le sous-espace A est $(e, 1)$ -irrationnel, on suppose par l'absurde qu'il existe un sous-espace rationnel $B \in \mathfrak{R}_n(e)$ intersectant A de façon non triviale. Le fait que les coordonnées de Plücker ζ de B soient rationnelles, alors que les coordonnées de Plücker ξ de A ne le sont pas, permet d'obtenir des équations entre les ζ_i . Plus $\dim_{\mathbb{Q}} \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(\xi)$ est grand, plus on obtient un grand nombre d'équations entre les ζ_i . On utilise alors les relations de Plücker entre les ζ_i , qui forment un système (S) d'équations non linéaires. Les ζ_i étant rationnels, des relations judicieuses entre eux peuvent permettre de montrer que ζ n'est pas solution de (S) . Ceci peut fonctionner même si le nombre de relations entre les ζ_i est petit devant le nombre d'équations de (S) , grâce à la non linéarité du système et au fait que les ζ_i soient rationnels.

3.5 Application d'un résultat de Moshchevitin

Dans cette section, on déduit le résultat suivant du théorème 1.22 de Moshchevitin, grâce au théorème du Going-up (théorème 2.29).

Théorème 3.15 Si $n = 2d$ avec $d \geq 2$, alors

$$\dot{\mu}_n(d|d-1)_1 \leq \frac{2d^2}{d+1}.$$

Preuve.

Posons $n = 2d$ et soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème 1.22 de Moshchevitin appliqué avec $\omega(t) = t^{-n-\varepsilon}$, il existe un sous-espace vectoriel $A_\varepsilon \in \mathfrak{I}_n(d, d)_1$ et une constante $c_1 > 0$ dépendant uniquement de ε , tels que

$$\forall D \in \mathfrak{R}_n(d), \quad \psi_1(A_\varepsilon, D) \geq \frac{c_1}{H(D)^{n+\varepsilon}}. \quad (3.29)$$

On a $A_\varepsilon \in \mathfrak{I}_n(d, d)_1 \subset \mathfrak{I}_n(d, d-1)_1$, notons $\alpha = \mu_n(A_\varepsilon | d-1)_1$. Il existe une infinité de sous-espaces rationnels $B \in \mathfrak{R}_n(d-1)$ tels que

$$\psi_1(A_\varepsilon, B) \leq \frac{1}{H(B)^{\alpha-\varepsilon}}. \quad (3.30)$$

Le théorème 2.29 du Going-up appliqué à A_ε et B avec

$$\begin{cases} H = H(B) \\ x_1 = \alpha - \varepsilon \\ y_1 = 0 \\ \forall i \in \{2, \dots, d-1\}, \quad x_i = y_i = 0 \end{cases}$$

montre l'existence de $C \in \mathfrak{R}_n(d)$ contenant B , tel que

$$\psi_1(A_\varepsilon, C) \leq \frac{c_2}{H(C)^{(\alpha-\varepsilon)(n-(d-1))/(n-d)}} = \frac{c_2}{H(C)^{(\alpha-\varepsilon)(d+1)/d}} \quad (3.31)$$

avec $c_2 > 0$ dépendant uniquement de ε (on rappelle que $n = 2d$).

On a $A_\varepsilon \in \mathfrak{I}_n(d, d)_1$, donc pour tout $C \in \mathfrak{R}_n(d)$, on a $\psi_1(A_\varepsilon, C) \neq 0$. Ainsi, s'il n'existait qu'un nombre fini de sous-espaces rationnels C vérifiant l'inégalité (3.31), on aurait une constante $c_3 > 0$ telle que

$$\forall C \in \mathfrak{R}_n(d), \quad \psi_1(A_\varepsilon, C) > c_3. \quad (3.32)$$

Or il existe une infinité de sous-espaces $B \in \mathfrak{R}_n(d-1)$ vérifiant l'inégalité (3.30), donc il en existe de hauteur arbitrairement grande, si bien que $\psi_1(A_\varepsilon, B) \leq c_3$. D'après le corollaire 2.23, le sous-espace C obtenu à partir d'un tel B vérifie (3.31) avec

$$\psi_1(A_\varepsilon, C) \leq \psi_1(A_\varepsilon, B) \leq c_3,$$

ce qui contredit (3.32). Il existe donc une infinité de sous-espaces $C \in \mathfrak{R}_n(d)$ pour lesquels (3.31) est vérifiée.

La hauteur de C pouvant être arbitrairement grande, et les constantes c_1 et c_2 dépendant uniquement de ε , les inégalités (3.29) et (3.31) imposent

$$(\alpha - \varepsilon) \frac{d+1}{d} \leq n + \varepsilon.$$

Finalement,

$$\dot{\mu}_n(d|d-1)_1 \leq \mu_n(A_\varepsilon | d-1)_1 = \alpha \leq \frac{2d^2}{d+1} + \varepsilon \left(\frac{d}{d+1} + 1 \right),$$

et ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient

$$\dot{\mu}_n(d|d-1)_1 \leq \frac{2d^2}{d+1}. \quad \square$$

Corollaire 3.16 On a

$$\begin{cases} \dot{\mu}_6(3|2)_1 \leq 9/2 = 4.5 \\ \dot{\mu}_8(4|3)_1 \leq 32/5 = 6.4. \end{cases}$$

Remarque 3.17 Le corollaire 3.16 améliore les majorants de Schmidt (théorème 1.17) :

$$\begin{cases} \dot{\mu}_6(3|2)_1 \leq 5 \\ \dot{\mu}_8(4|3)_1 \leq 8. \end{cases}$$

La nouvelle majoration est même asymptotiquement meilleure que celle de Schmidt. En effet, on a obtenu un majorant équivalent quand n tend vers l'infini à $2d$, alors que le théorème 1.17 donne

$$\dot{\mu}_n(d|d-1)_1 \leq \left\lfloor \frac{d^2}{2} \right\rfloor.$$

Chapitre 4

Approximation de sommes directes de sous-espaces vectoriels

Dans ce chapitre, l'objectif est de minorer $\dot{\mu}_n(d|e)_j$ pour tout $n \geq 4$. La stratégie consiste à décomposer le sous-espace vectoriel A approché en une somme directe de sous-espaces de dimensions plus petites (en l'occurrence des droites). Il est alors possible d'approcher simultanément ces droites (grâce au théorème d'approximation simultanée de Dirichlet), et d'en déduire une approximation de A .

Ceci permet d'améliorer la minoration connue de $\dot{\mu}_n(d|e)_j$: c'est le théorème 4.1, qui donne

$$\dot{\mu}_n(d|e)_j \geq \frac{(n-j)(jn - jd + j^2/2 + j/2 + 1)}{j^2(n-e)(n-d + j/2 + 1/2)}.$$

4.1 Les résultats obtenus

4.1.1 Un résultat d'approximation

Le résultat principal de ce chapitre est le théorème suivant. Sa preuve consiste à construire un sous-espace vectoriel de dimension j de l'espace A qu'on cherche à approcher. On décompose ce sous-espace en somme directe de droites. On approche ensuite simultanément ces droites par des droites rationnelles de hauteurs comparables entre elles, grâce au théorème d'approximation simultanée de Dirichlet. On conclut enfin grâce au théorème du Going-up.

Théorème 4.1 Soient $n \geq 4$ et $d, e \in \{1, \dots, n-1\}$ tels que $d + e \leq n$; soit $j \in \{1, \dots, \min(d, e)\}$. On a

$$\dot{\mu}_n(d|e)_j \geq \frac{(n-j)(jn - jd + j^2/2 + j/2 + 1)}{j^2(n-e)(n-d + j/2 + 1/2)}.$$

Remarque 4.2 La minoration de $\dot{\mu}_n(d|e)_j$ obtenue dans le théorème 4.1 est équivalente quand n tend vers l'infini (avec j, d et e fixés) à $1/j$. Celle-ci est asymptotiquement meilleure que celle de Schmidt (théorème 1.14) qui est équivalente quand n tend vers l'infini à

$$\frac{d}{jn} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Le théorème 1.14 donne par exemple que pour tout $n \geq 5$,

$$\dot{\mu}_n(2|2)_2 \geq \frac{1}{n-2},$$

ce qui est moins bon que la minoration

$$\dot{\mu}_n(2|2)_2 \geq \frac{n}{2n-1}$$

donnée par le théorème 4.1.

On en déduit immédiatement du théorème 4.1 le corollaire suivant.

Corollaire 4.3 Soient $n \geq 4$ et $d \leq n/2$ un entier. On a

$$\dot{\mu}_n(d|d)_d \geq \frac{2dn - d^2 + d + 2}{2d^2n - d^3 + d^2}.$$

De plus, en combinant le corollaire 4.3 et le corollaire 1.26 de Saxcé, on obtient pour $n \geq 2d$ l'encadrement

$$\frac{2dn - d^2 + d + 2}{2d^2n - d^3 + d^2} \leq \dot{\mu}_n(d|d)_d \leq \frac{n}{d(n-d)},$$

ce qui donne le corollaire suivant.

Corollaire 4.4 On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \dot{\mu}_n(d|d)_d = \frac{1}{d}.$$

4.1.2 Comportement de la proximité par sommes directes

L'idée principale de la preuve du théorème 4.1 est de décomposer un sous-espace en somme directe de sous-espaces plus petits. Il est donc utile de savoir comment se comporte la proximité par l'opération de somme directe.

Proposition 4.5 Soient $n \geq 4$, et $F_1, \dots, F_\ell, B_1, \dots, B_\ell$, 2ℓ sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n tels que pour tout $i \in \{1, \dots, \ell\}$, $\dim F_i = \dim B_i = d_i$. Supposons que les F_i engendrent un sous-espace de dimension $k = d_1 + \dots + d_\ell$ et de même pour les B_i . Posons

$$F = \bigoplus_{i=1}^{\ell} F_i \quad \text{et} \quad B = \bigoplus_{i=1}^{\ell} B_i.$$

Alors on a

$$\psi_k(F, B) \leq c_{F,n} \sum_{i=1}^{\ell} \psi_{d_i}(F_i, B_i)$$

où $c_{F,n} > 0$ est une constante qui dépend uniquement de F_1, \dots, F_ℓ et de n .

Remarque 4.6 Intuitivement, cela signifie que si les sous-espaces F_i et B_i sont presque confondus pour tout i , alors F et B sont presque confondus.

4.2 Les preuves

Démontrons ici les résultats de la section 4.1.

4.2.1 Proximité et sommes directes

On démontre la proposition 4.5.

Preuve.

L'idée de la preuve est de décomposer chaque F_i et chaque B_i en somme directe de droites bien choisies. On commence par un bref lemme qui indiquera comment bien choisir ces droites.

Lemme 4.7 Soient D et E des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n de même dimension k . Il existe D_1, \dots, D_k des droites de D et E_1, \dots, E_k des droites de E , telles que

$$D = \bigoplus_{i=1}^k D_i \quad \text{et} \quad E = \bigoplus_{i=1}^k E_i,$$

et qui vérifient de plus :

$$\psi_k(D, E) \leq \sum_{i=1}^k \psi_1(D_i, E_i) \leq k\psi_k(D, E).$$

Preuve. (Lemme 4.7)

D'après le théorème 1.8, il existe des bases orthonormales (X_1, \dots, X_k) de D et (Y_1, \dots, Y_k) de E telles que

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, \quad \psi_i(D, E) = \psi(X_i, Y_i).$$

Or, toujours d'après ce théorème, on a

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, \quad \psi_i(D, E) \leq \psi_k(D, E).$$

Ainsi, on peut poser pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$

$$D_i = \text{Vect}(X_i) \quad \text{et} \quad E_i = \text{Vect}(Y_i).$$

On a alors

$$\sum_{i=1}^k \psi_1(D_i, E_i) = \sum_{i=1}^k \psi(X_i, Y_i) = \sum_{i=1}^k \psi_i(D, E) \leq k\psi_k(D, E)$$

ce qui conclut la preuve de la majoration.

Pour la minoration, on remarque que tous les $\psi_1(D_i, E_i)$ sont positifs, et donc

$$\psi_k(D, E) = \psi_1(D_k, E_k) \leq \sum_{i=1}^k \psi_1(D_i, E_i).$$

□

Revenons à la preuve de la proposition 4.5.

Soit $i \in \{1, \dots, \ell\}$. D'après le lemme 4.7, il existe des droites $D_{i,1}, \dots, D_{i,d_i}$ de F_i et des droites $E_{i,1}, \dots, E_{i,d_i}$ de B_i telles que

$$\sum_{j=1}^{d_i} \psi_1(E_{i,j}, D_{i,j}) \leq d_i \psi_{d_i}(F_i, B_i) \leq n \psi_{d_i}(F_i, B_i). \quad (4.1)$$

Soient $e_{i,1}, \dots, e_{i,d_i}$ des vecteurs directeurs unitaires de $D_{i,1}, \dots, D_{i,d_i}$ respectivement et $b_{i,1}, \dots, b_{i,d_i}$ des vecteurs directeurs unitaires de $E_{i,1}, \dots, E_{i,d_i}$ respectivement, tels que

$$\forall j \in \{1, \dots, d_i\}, \quad e_{i,j} \cdot b_{i,j} \geq 0. \quad (4.2)$$

D'après le théorème 1.8, il existe des vecteurs unitaires $X_k \in F$ et $Y_k \in B$ tels que

$$\psi_k(F, B) = \psi(X_k, Y_k).$$

Soit $Z = \lambda_1 Y_1 + \dots + \lambda_k Y_k$ un vecteur unitaire de B . D'après le théorème 1.8, on a

$$|X_k \cdot Z| = \left| \sum_{i=1}^k \lambda_i X_k \cdot Y_i \right| \leq \sum_{i=1}^k |\lambda_i \delta_{i,k} X_k \cdot Y_i| = |\lambda_k| X_k \cdot Y_k \leq X_k \cdot Y_k \quad (4.3)$$

car Z étant unitaire, $|\lambda_k| \leq 1$. L'inégalité (4.3) donne donc

$$\psi_k(F, B) = \psi(X_k, Y_k) \leq \min_{Z \in B \setminus \{0\}} \psi(X_k, Z) = \psi_1(\text{Vect}(X_k), B).$$

De plus, $\text{Vect}(Y_k) \subset B$, donc d'après le corollaire 2.23, on a

$$\psi_k(F, B) = \psi(X_k, Y_k) \geq \psi_1(\text{Vect}(X_k), B).$$

Finalement,

$$\psi_k(F, B) = \psi_1(\text{Vect}(X_k), B). \quad (4.4)$$

Décomposons X_k dans la base $(e_{1,1}, \dots, e_{\ell, d_\ell})$:

$$X_k = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{d_i} x_{i,j} e_{i,j},$$

et posons

$$Y = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{d_i} x_{i,j} b_{i,j} \in B.$$

Comme X_k est unitaire, on a d'après le lemme 2.19 :

$$\psi(X_k, Y) \leq \|X_k - Y\| = \left\| \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{d_i} x_{i,j} (e_{i,j} - b_{i,j}) \right\| \leq \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{d_i} |x_{i,j}| \|e_{i,j} - b_{i,j}\|,$$

où $\|\cdot\|$ désigne – ici et dans toute la suite – la norme euclidienne canonique.

Considérons maintenant pour $i \in \{1, \dots, \ell\}$ et $j \in \{1, \dots, d_i\}$ les applications coordonnées :

$$\begin{aligned} p_{i,j} : \quad F &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{d_i} x_{i,j} e_{i,j} &\longmapsto x_{i,j}. \end{aligned}$$

Ces applications sont continues sur le compact

$$K = \{x \in F, \|x\| = 1\},$$

elles sont donc bornées sur cet ensemble. Ainsi, il existe $c_{F,n}^{(1)}$ une constante dépendant seulement de $e_{1,1}, \dots, e_{\ell, d_\ell}$ telle que

$$\forall x = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{d_i} x_{i,j} e_{i,j} \in K, \quad |x_{i,j}| \leq c_{F,n}^{(1)}.$$

Revenons au calcul principal : comme pour tous i, j on a $e_{i,j} \cdot b_{i,j} \geq 0$ d'après (4.2), on a en appliquant le lemme 2.20 que

$$\psi(X_k, Y) \leq c_{F,n}^{(1)} \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{d_i} \|e_{i,j} - b_{i,j}\| \leq c_{F,n}^{(2)} \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{d_i} \psi_1(D_{i,j}, E_{i,j})$$

car les $e_{i,j}$ et les $b_{i,j}$ sont des vecteurs unitaires, avec $c_{F,n}^{(2)} = \sqrt{2} c_{F,n}^{(1)}$.

Finalement, avec l'inégalité (4.1), on a

$$\psi(X_k, Y) \leq c_{F,n}^{(2)} n \sum_{i=1}^{\ell} \psi_{d_i}(F_i, B_i). \quad (4.5)$$

Or, l'équation (4.4) donne

$$\psi_k(F, B) \leq \psi_1(\text{Vect}(X_k), B) \leq \psi(X_k, Y),$$

car $Y \in B$, et avec l'inégalité (4.5) on obtient

$$\psi_k(F, B) \leq c_{F,n} \sum_{i=1}^{\ell} \psi_{d_i}(F_i, B_i),$$

ce qui termine la preuve de la proposition 4.5. \square

4.2.2 Minoration de $\dot{\mu}_n(d|e)_j$

Démontrons le théorème 4.1.

Preuve.

Soit $F \in \mathfrak{I}_n(d, e)_j$ un sous-espace (e, j) -irrationnel de \mathbb{R}^n .

Montrons que F possède une famille orthonormale (f_1, \dots, f_j) telle que pour tout $\ell \in \{1, \dots, j\}$, f_ℓ ait au moins $d - \ell$ coordonnées nulles.

Pour cela on construit les f_ℓ par récurrence sur $\ell \in \{0, \dots, j\}$. Pour $\ell = 0$, il n'y a rien à construire et le résultat est évident.

On suppose désormais que les vecteurs f_1, \dots, f_ℓ sont construits pour un certain $\ell \in \{0, \dots, j - 1\}$. On note G le supplémentaire orthogonal de $\text{Vect}(f_1, \dots, f_\ell)$ dans F . On a

$$\text{codim}(\mathbb{R}^{n-d+\ell+1} \times \{0\}^{d-\ell-1}) = d - \ell - 1 < d - \ell = \dim F - \ell = \dim G - 1,$$

donc

$$G \cap (\mathbb{R}^{n-d+\ell+1} \times \{0\}^{d-\ell-1}) \neq \{0\}.$$

On choisit $f_{\ell+1} \in G \cap (\mathbb{R}^{n-d+\ell+1} \times \{0\}^{d-\ell-1})$ unitaire. Le vecteur $f_{\ell+1}$ a bien au moins $d - (\ell + 1)$ coordonnées nulles, et il est orthogonal à f_1, \dots, f_ℓ , ce qui termine la récurrence.

On fixe donc dans toute la suite une famille orthonormale (f_1, \dots, f_j) de F telle que pour tout $\ell \in \{1, \dots, j\}$, le vecteur f_ℓ ait au moins $d - \ell$ coordonnées nulles.

Notons \underline{x} le vecteur formé de toutes les coordonnées non nulles des f_ℓ pour $\ell \in \{1, \dots, j\}$. Comme chaque f_ℓ a au moins $d - \ell$ coordonnées nulles pour $\ell \in \{1, \dots, j\}$, \underline{x} a au plus

$$\sum_{\ell=1}^j (n - (d - \ell)) = jn - jd + \frac{1}{2}j^2 + \frac{1}{2}j$$

coordonnées. Notons $N \in \{1, \dots, jn - jd + j^2/2 + j/2\}$ le nombre de coordonnées de \underline{x} .

On a $\underline{x} \in \mathbb{R}^N \setminus \mathbb{Q}^N$, sinon (f_1, \dots, f_j) serait une base rationnelle d'un sous-espace vectoriel de dimension j de F , ce qui contredirait l'hypothèse $F \in \mathfrak{I}_n(d, e)_j$.

Donc d'après le théorème d'approximation simultanée de Dirichlet (théorème 2.27), il existe une infinité de couples $(p, q) \in \mathbb{Z}^N \times \mathbb{N}^*$ tels que $\text{pgcd}(p_1, \dots, p_N, q) = 1$ et

$$\left\| \underline{x} - \frac{p}{q} \right\|_\infty \leq \frac{1}{q^{1+1/N}}. \quad (4.6)$$

On se donne un tel couple (p, q) .

Rappelons que \underline{x} est le vecteur formé par les coordonnées non nulles de f_1, \dots, f_j . Pour $i \in \{1, \dots, j\}$, notons p_i le sous-vecteur de p correspondant aux coordonnées approchant celles de f_i , complété avec des zéros de sorte que $p_i \in \mathbb{Z}^n$ soit proche de qf_i . On a

$$\forall i \in \{1, \dots, j\}, \quad \left\| f_i - \frac{p_i}{q} \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{q^{1+1/N}}.$$

Posons

$$B = \text{Vect}(p_1, \dots, p_j),$$

et notons $p_{\perp}(f_i)$ le projeté orthogonal de f_i sur $\text{Vect}(p_i/q)$. On peut alors mener le calcul suivant, illustré sur la figure 4.1 (voir aussi le lemme 2.18) :

$$\psi(f_i, p_i/q) = \sin(\widehat{f_i, p_i/q}) = \frac{\|f_i - p_{\perp}(f_i)\|}{\|f_i\|} \leq \left\| f_i - \frac{p_i}{q} \right\| \leq \frac{c_1}{q^{1+1/N}} \quad (4.7)$$

car $\|f_i\| = 1$, avec $c_1 > 0$ ne dépendant que de n .

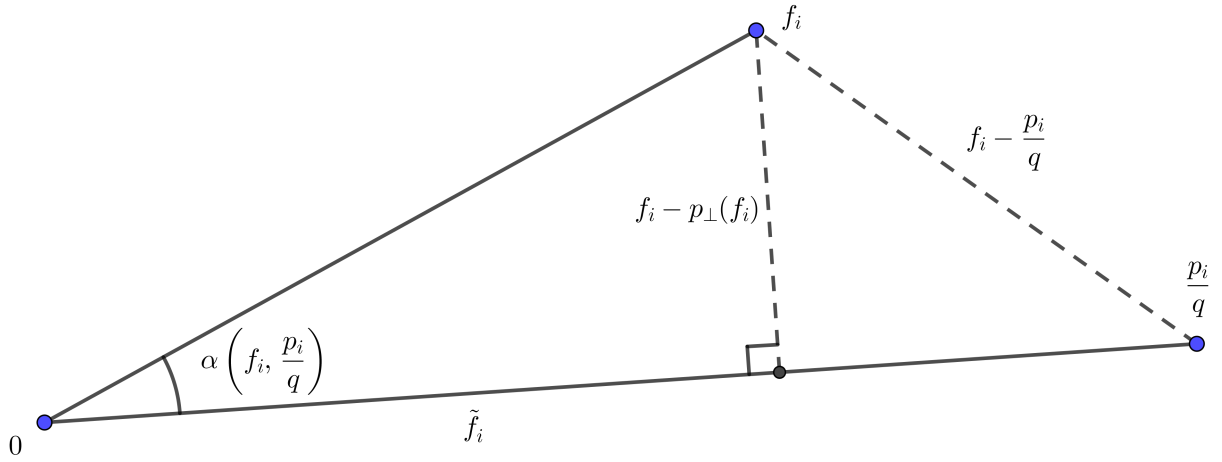


FIGURE 4.1 – Approximation de f_i par p_i/q

Il reste alors à majorer la hauteur de $B = \text{Vect}(p_1, \dots, p_j)$.

L'inégalité (4.6) donne

$$\|p\|_{\infty} - \|q\underline{x}\|_{\infty} \leq \|q\underline{x} - p\|_{\infty} \leq q^{-1/N} \leq 1,$$

donc pour tout $i \in \{1, \dots, j\}$:

$$\|p_i\|_{\infty} \leq \|p\|_{\infty} \leq 1 + \|q\underline{x}\|_{\infty} \leq c_2 q$$

avec $c_2 > 0$ qui ne dépend que de F .

Pour E sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n et P une famille de vecteurs linéairement indépendants de E , notons $\text{vol}_E(P)$ le volume du paralléloétope engendré par les vecteurs de P vus dans l'espace euclidien E . Comme (p_1, \dots, p_j) est un sous-réseau de $B \cap \mathbb{Z}^n$, on a d'après la proposition 2.14 :

$$H(B) \leq \text{vol}_B(p_1, \dots, p_j) \leq \prod_{i=1}^j \|p_i\| \leq c_3 q^j$$

avec $c_3 > 0$ qui ne dépend que de F . Ainsi, il existe une constante $c_4 > 0$ telle que

$$\frac{1}{q} \leq \frac{c_4}{H(B)^{1/j}}. \quad (4.8)$$

Rappelons qu'en posant $B_i = \text{Vect}(p_i)$, la relation (4.7) donne

$$\forall i \in \{1, \dots, j\}, \quad \psi_1(\text{Vect}(f_i), B_i) \leq \frac{c_1}{q^{(N+1)/N}}.$$

Notons

$$\tilde{F}_j = \text{Vect}(f_1, \dots, f_j)$$

qui est de dimension j car la famille (f_1, \dots, f_j) est libre. Alors d'après la proposition 4.5, on a

$$\psi_j(\tilde{F}_j, B) = \psi_j \left(\bigoplus_{i=1}^j \text{Vect}(f_i), \bigoplus_{i=1}^j B_i \right) \leq c_5 \sum_{i=1}^j \psi_1(\text{Vect}(f_i), B_i) \leq \frac{c_6}{q^{(N+1)/N}} \quad (4.9)$$

avec $c_5, c_6 > 0$ ne dépendant que de n et de F .

De plus, on a $F \supset \tilde{F}_j$, donc d'après le corollaire 2.23 :

$$\psi_j(F, B) \leq \psi_j(\tilde{F}_j, B).$$

Ainsi, avec (4.8) et (4.9), il existe une constante $c_7 > 0$ ne dépendant que de n et de F telle que

$$\psi_j(F, B) \leq \frac{c_6}{q^{(N+1)/N}} \leq \frac{c_7}{H(B)^{(N+1)/(jN)}} \leq \frac{c_7}{H(B)^{(jn-jd+j^2/2+j/2+1)/(j(jn-jd+j^2/2+j/2))}}, \quad (4.10)$$

car $N \leq jn - jd + j^2/2 + j/2$.

Appliquons finalement le théorème du Going-up par récurrence sur $\ell \in \{j, \dots, e\}$. Si $\ell = j$, le sous-espace B construit convient. Soit $\ell \in \{j, \dots, e-1\}$, supposons par

hypothèse de récurrence qu'il existe un sous-espace rationnel $C_\ell \in \mathfrak{R}_n(\ell)$ tel que $B \subset C_\ell$ et

$$\psi_j(F, C_\ell) \leq \frac{c^{(\ell)}}{H(C_\ell)^{\alpha(n-j)/(n-\ell)}}$$

avec $c^{(\ell)} > 0$ dépendant uniquement de n et de F et

$$\alpha = \frac{(jn - jd + j^2/2 + j/2 + 1)}{j^2(n - d + j/2 + 1/2)}.$$

Alors d'après le théorème 2.29 du Going-up appliqué avec

$$\begin{cases} H = H(C_\ell) \\ x_j = \alpha(n - j)/(n - \ell) \\ y_j = 0 \\ \forall i \in \{1, \dots, \min(d, e)\} \setminus \{j\}, \quad x_i = y_i = 0, \end{cases}$$

il existe un sous-espace rationnel $C_{\ell+1} \in \mathfrak{R}_n(\ell + 1)$ tel que $C_{\ell+1} \supset C_\ell \supset B$, et il existe $c^{(\ell+1)} > 0$ dépendant uniquement de n et F , tels que

$$\psi_j(F, C_{\ell+1}) \leq \frac{c^{(\ell+1)}}{H(C_{\ell+1})^{\alpha(n-\ell)(n-j)/((n-\ell)(n-\ell-1))}} = \frac{c^{(\ell+1)}}{H(C_{\ell+1})^{\alpha(n-j)/(n-\ell-1)}},$$

ce qui conclut la récurrence.

Posons $C = C_e$, on a ainsi construit un sous-espace rationnel $C \in \mathfrak{R}_n(e)$ tel que $C \supset B$ et

$$\psi_j(F, C) \leq \frac{c_8}{H(C)^\beta} \tag{4.11}$$

avec $c_8 > 0$ ne dépendant que de n et de F , et

$$\beta = \frac{(n - j)(jn - jd + j^2/2 + j/2 + 1)}{j^2(n - e)(n - d + j/2 + 1/2)}.$$

De plus, on a $F \in \mathfrak{I}_n(d, e)_j$, donc pour tout $C \in \mathfrak{R}_n(e)$, on a $\psi_j(F, C) \neq 0$. Ainsi, s'il n'existait qu'un nombre fini de sous-espaces rationnels C vérifiant (4.11), on aurait une constante $c > 0$ telle que

$$\forall C \in \mathfrak{R}_n(e), \quad \psi_j(F, C) > c. \tag{4.12}$$

Or l'inégalité (4.10) donne, compte tenu du corollaire 2.23 :

$$\psi_j(F, C) \leq \psi_j(F, B) \xrightarrow{q \rightarrow \infty} 0,$$

ce qui contredit (4.12).

Finalement, il existe une infinité de sous-espaces rationnels C ainsi construits approchant F à l'exposant β . On a donc $\mu_n(F|e)_j \geq \beta$, d'où

$$\dot{\mu}_n(d|e)_j \geq \beta,$$

ce qui termine la démonstration du théorème 4.1. □

Chapitre 5

Inclusion dans un sous-espace vectoriel rationnel

On s'intéresse dans ce chapitre à un cas particulier : le cas où le sous-espace vectoriel A que l'on souhaite approcher est inclus dans un sous-espace rationnel de \mathbb{R}^n . Cette étude sera notamment utile pour le chapitre 6.

Le résultat principal est le théorème 5.1 ci-dessous. En le combinant notamment avec des résultats du chapitre 3, on obtient de nouvelles majorations de $\dot{\mu}_n(d|d)_1$, notamment $\dot{\mu}_5(2|2)_1 \leq 3$. Ces corollaires sont énoncés et démontrés dans la section 5.2, juste après l'énoncé du théorème 5.1 et l'esquisse de sa preuve (section 5.1). Enfin, les lemmes qui forment cette esquisse sont démontrés dans la section 5.3.

5.1 Le théorème principal

L'énoncé principal de ce chapitre est le suivant.

Théorème 5.1 Soient $n \geq 2$ et $k \in \{2, \dots, n\}$. Soient $d, e \in \{1, \dots, k-1\}$ tels que $d + e \leq k$, et $j \in \{1, \dots, \min(d, e)\}$. Soit A un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n de dimension d tel qu'il existe un sous-espace vectoriel rationnel $F \in \mathfrak{R}_n(k)$ vérifiant $A \subset F$.

Notons φ un isomorphisme rationnel de F dans \mathbb{R}^k et $\tilde{A} = \varphi(A)$, qui est un sous-espace vectoriel de dimension d de \mathbb{R}^k .

Supposons que pour tout sous-espace rationnel B' de F de dimension e , on a

$$\dim(A \cap B') < j. \tag{5.1}$$

Alors $A \in \mathfrak{J}_n(d, e)_j$, $\tilde{A} \in \mathfrak{J}_k(d, e)_j$ et

$$\mu_n(A|e)_j = \mu_k(\tilde{A}|e)_j.$$

On peut déjà remarquer que l'hypothèse (5.1), faite pour $B' \subset F$ rationnel de dimension e , est *a priori* une version faible de l'hypothèse $A \in \mathfrak{J}_n(d, e)_j$ (*i.e.* $\dim(A \cap B) < j$ pour tout $B \in \mathfrak{R}_n(e)$). Le théorème 5.1 montre notamment que ces deux hypothèses

sont équivalentes.

On se place dans toute la suite de cette sous-section dans le cadre des hypothèses du théorème 5.1. Des lemmes 5.2, 5.3 et 5.5 découle directement le théorème 5.1.

Lemme 5.2 On a

$$A \in \mathfrak{J}_n(d, e)_j \quad \text{et} \quad \tilde{A} \in \mathfrak{J}_k(d, e)_j.$$

On démontre ensuite, pour commencer, l'inégalité la plus facile : elle vient du fait que tout sous-espace vectoriel \tilde{B} de \mathbb{R}^k s'écrit $\varphi(B)$, avec B un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n (inclus dans F).

Lemme 5.3 On a

$$\mu_n(A|e)_j \geq \mu_k(\tilde{A}|e)_j.$$

Pour démontrer l'inégalité inverse, on a besoin de savoir comment se comporte la proximité entre deux sous-espaces vis-à-vis d'une projection.

Lemme 5.4 Soit \mathcal{R} une partie non vide de \mathbb{R}^n telle que $\mathcal{R} \cap F^\perp = \emptyset$ et telle qu'il existe une constante $c > 0$ vérifiant

$$\forall X \in \mathcal{R}, \quad \|p_F^\perp(X)\| \geq c \|X\| \quad (5.2)$$

où p_F^\perp est la projection orthogonale sur F .

Soit D un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n tel que $\dim D \geq j$, et vérifiant $D \subset \mathcal{R} \cup \{0\}$. Alors il existe une constante $c' > 0$ dépendant seulement de c telle que

$$\psi_j(A, D) \geq c' \psi_j(A, p_F(D)).$$

Il est alors possible de montrer l'inégalité inverse. L'idée est que si un sous-espace rationnel approche A , alors son projeté orthogonal sur le sous-espace rationnel F approche bien A lui-aussi ; via φ on obtient alors un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^k qui approche bien \tilde{A} .

Lemme 5.5 On a

$$\mu_n(A|e)_j \leq \mu_k(\tilde{A}|e)_j.$$

5.2 Applications du théorème principal

Déduisons du théorème 5.1 une amélioration de la meilleure majoration connue de $\dot{\mu}_n(d|e)_j$ dans quelques cas particuliers.

Pour commencer, la proposition 5.6 améliore la majoration de Schmidt donnée par le théorème 1.17 : $\dot{\mu}_5(2|2)_1 \leq 4$.

Proposition 5.6 On a

$$\dot{\mu}_5(2|2)_1 \leq 3.$$

Preuve.

D'après la proposition 3.5, le sous-espace $A_{\sqrt{2}}$ défini dans la sous-section 3.2.1 vérifie

$$\mu_4(A_{\sqrt{2}}|2)_1 = 3.$$

Soit ρ un isomorphisme rationnel de \mathbb{R}^4 dans $\mathbb{R}^4 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^5$. Posons $A = \rho(A_{\sqrt{2}})$.

Comme $A_{\sqrt{2}} \in \mathfrak{I}_4(2, 2)_1$, le sous-espace $A_{\sqrt{2}}$ vérifie l'hypothèse (5.1) du théorème 5.1. Donc d'après le théorème 5.1, on a $A \in \mathfrak{I}_5(2, 2)_1$ et

$$\mu_5(A|2)_1 = \mu_4(A_{\sqrt{2}}|2)_1 = 3,$$

ce qui conclut la preuve de la proposition 5.6. \square

De façon similaire, on déduit la proposition suivante du résultat de Moshchevitin énoncé à la sous-section 1.3.3.

Proposition 5.7 Soit $n \geq 6$ et $d \in \{3, \dots, \lfloor n/2 \rfloor\}$, on a

$$\dot{\mu}_n(d|d)_1 \leq 2d.$$

Preuve.

D'après le théorème 1.22, il existe un sous-espace $\tilde{A} \in \mathfrak{I}_{2d}(d, d)_1$ tel que

$$\mu_{2d}(\tilde{A}|d)_1 \leq 2d.$$

Soit ρ un isomorphisme rationnel de \mathbb{R}^{2d} dans $\mathbb{R}^{2d} \times \{0\}^{n-2d} \subset \mathbb{R}^n$. Posons $A = \rho(\tilde{A})$.

Alors d'après le théorème 5.1, on a $A \in \mathfrak{I}_n(d, d)_1$ et

$$\mu_n(A|d)_1 = \mu_{2d}(\tilde{A}|d)_1 \leq 2d,$$

ce qui conclut la preuve de la proposition 5.7. \square

Remarque 5.8 D'après le théorème 1.17, on a

$$\dot{\mu}_n(d|d)_1 \leq \left\lceil \frac{dn - d^2 + 1}{n - 2d + 1} \right\rceil.$$

La proposition 5.7 améliore cette majoration dans de nombreux cas où n est proche de $2d$. Par exemple les majorants $\dot{\mu}_7(3|3)_1 \leq 7$, $\dot{\mu}_9(4|4)_1 \leq 11$ et $\dot{\mu}_{10}(4|4)_1 \leq 9$ sont améliorés respectivement par 6, 8 et 8.

De façon identique à la proposition 5.7, le théorème 3.15 permet d'obtenir grâce au théorème 5.1 la proposition suivante.

Proposition 5.9 Soit $n \geq 6$ et $d \in \{3, \dots, \lfloor n/2 \rfloor\}$, on a

$$\dot{\mu}_n(d|d-1)_1 \leq \frac{2d^2}{d+1}.$$

Remarque 5.10 La proposition 5.9 améliore plusieurs majorations connues, notamment quand n est proche de $2d$. Par exemple, les majorants $\dot{\mu}_9(4|3)_1 \leq 7$, $\dot{\mu}_{11}(5|4)_1 \leq 10$ et $\dot{\mu}_{12}(5|4)_1 \leq 9$ sont améliorés respectivement par $32/5$, $25/3$ et $25/3$.

5.3 Démonstration du théorème 5.1

Démontrons ici les lemmes énoncés dans la section 5.1.

Commençons par la preuve du lemme 5.2 : $A \in \mathfrak{J}_n(d, e)_j$ et $\tilde{A} \in \mathfrak{J}_k(d, e)_j$.

Preuve.

Soit $B \in \mathfrak{R}_n(e)$. On remarque que $B' = B \cap F$ est un sous-espace rationnel de dimension $e' \leq e \leq \dim F$. Donc il existe un sous-espace rationnel $B'' \subset F$ contenant B' , avec $\dim B'' = e$. L'hypothèse (5.1) montre que $\dim(A \cap B'') < j$, d'où

$$\dim(A \cap B') < j.$$

Or on a

$$A \cap B = A \cap F \cap B = A \cap B'$$

car $A \subset F$, donc $\dim(A \cap B) < j$: on a $A \in \mathfrak{J}_n(d, e)_j$.

Soit $\tilde{B} \in \mathfrak{R}_k(e)$. Posons

$$B = \varphi^{-1}(\tilde{B}) \in \mathfrak{R}_n(e).$$

Or φ est un isomorphisme, donc

$$\dim(\tilde{A} \cap \tilde{B}) = \dim(\varphi(A) \cap \varphi(B)) = \dim(\varphi(A \cap B)) = \dim(A \cap B) < j$$

car $B \in \mathfrak{R}_n(e)$ et $A \in \mathfrak{J}_n(d, e)_j$. Cela montre que $\tilde{A} \in \mathfrak{J}_k(d, e)_j$ et termine la preuve du lemme 5.2. \square

Démontrons maintenant l'inégalité du lemme 5.3 : $\mu_n(A|e)_j \geq \mu_k(\tilde{A}|e)_j$.

Preuve.

Soit $\alpha < \mu_k(\tilde{A}|e)_j$. Alors il existe une suite $(\tilde{B}_N)_{N \geq 0}$ de sous-espaces rationnels de \mathbb{R}^k de dimension e , deux à deux distincts, tels que pour tout N suffisamment grand :

$$\psi_j(\tilde{A}, \tilde{B}_N) \leq \frac{1}{H(\tilde{B}_N)^\alpha}.$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on pose

$$B_N = \varphi^{-1}(\tilde{B}_N) \in \mathfrak{R}_n(e)$$

car φ est un isomorphisme rationnel.

D'après la proposition 2.16, il existe $c_{\varphi^{-1}}$ telle que pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$H(B_N) = H(\varphi^{-1}(\tilde{B}_N)) \leq c_{\varphi^{-1}} H(\tilde{B}_N).$$

De plus, d'après la proposition 2.26, il existe une constante $c'_{\varphi^{-1}} > 0$ telle que

$$\psi_j(A, B_N) = \psi_j(\varphi^{-1}(\tilde{A}), \varphi^{-1}(\tilde{B}_N)) \leq c'_{\varphi^{-1}} \psi_j(\tilde{A}, \tilde{B}_N).$$

Finalement, pour N assez grand,

$$\psi_j(A, B_N) \leq c'_{\varphi^{-1}} \psi_j(\tilde{A}, \tilde{B}_N) \leq \frac{c'_{\varphi^{-1}}}{H(\tilde{B}_N)^\alpha} \leq \frac{c_1}{H(B_N)^\alpha},$$

où $c_1 > 0$ ne dépend que de φ . Comme les B_N sont encore deux à deux distincts, on en déduit

$$\mu_n(A|e)_j \geq \alpha.$$

Ceci étant vrai pour tout $\alpha < \mu_k(\tilde{A}|e)_j$, on obtient

$$\mu_n(A|e)_j \geq \mu_k(\tilde{A}|e)_j,$$

ce qui termine la preuve du lemme 5.3. □

Démontrons le lemme 5.4 donnant le comportement de la proximité vis-à-vis d'une projection. La preuve de ce lemme suit les idées de la preuve du lemme 13 page 446 de l'article [Sch67]. Ce dernier démontre, sous des hypothèses plus faibles, un résultat similaire avec une transformation inversible au lieu d'une projection.

Preuve.

En utilisant l'hypothèse (5.2) du lemme et le fait que p_F^\perp soit une projection orthogonale, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\forall X \in \mathcal{R}, \quad c \|X\| \leq \|p_F^\perp(X)\| \leq \|X\|. \quad (5.3)$$

En particulier on a $c \leq 1$ car $\mathcal{R} \neq \emptyset$, donc on peut supposer que $F \setminus \{0\} \subset \mathcal{R}$ puisque $\|p_F^\perp(X)\| = \|X\|$ pour tout $X \in F$.

Montrons qu'il existe une constante $c_1 > 0$ (qui dépend seulement de $c > 0$) telle que

$$\forall X \in F \setminus \{0\}, \quad \forall Y \in \mathcal{R}, \quad \psi(X, p_F^\perp(Y)) \leq c_1 \psi(X, Y). \quad (5.4)$$

Soient $X \in F \setminus \{0\}$ et $Y \in \mathcal{R}$. Comme

$$\psi\left(\frac{X}{\|X\|}, \frac{Y}{\|Y\|}\right) = \psi(X, Y)$$

et que la projection p_F^\perp est linéaire, on peut supposer que $\|X\| = \|Y\| = 1$. De plus, on peut supposer $X \cdot Y \geq 0$ quitte à remplacer Y par $-Y$.

On a

$$\begin{aligned}
\psi^2(X, p_F^\perp(Y)) &= 1 - \cos^2(\widehat{X, p_F^\perp(Y)}) \\
&= 1 - \frac{(X \cdot p_F^\perp(Y))^2}{\|p_F^\perp(Y)\|^2} \\
&= \frac{\|p_F^\perp(Y)\|^2 - (X \cdot p_F^\perp(Y))^2}{\|p_F^\perp(Y)\|^2}.
\end{aligned}$$

Posons $\lambda = \|p_F^\perp(Y)\|$; on remarque alors que

$$\begin{aligned}
0 \leq (X \cdot p_F^\perp(Y) - \lambda)^2 &\iff 0 \leq (X \cdot p_F^\perp(Y))^2 - 2\lambda(X \cdot p_F^\perp(Y)) + \lambda^2 \\
&\iff \lambda^2 - (X \cdot p_F^\perp(Y))^2 \leq 2(\lambda^2 - \lambda(X \cdot p_F^\perp(Y))).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\psi^2(X, p_F^\perp(Y)) &\leq \frac{2(\lambda^2 - \lambda(X \cdot p_F^\perp(Y)))}{\|p_F^\perp(Y)\|^2} \\
&= 2 \frac{\|p_F^\perp(Y)\|^2 - \|p_F^\perp(Y)\| (X \cdot p_F^\perp(Y))}{\|p_F^\perp(Y)\|^2} \\
&= 2 \frac{\|p_F^\perp(Y)\| - X \cdot p_F^\perp(Y)}{\|p_F^\perp(Y)\|}.
\end{aligned}$$

Utilisons alors la première inégalité de (5.3) qui donne

$$\psi^2(X, p_F^\perp(Y)) \leq \frac{2}{c} (\|p_F^\perp(Y)\| - X \cdot p_F^\perp(Y)).$$

Or

$$\frac{1}{2} \left(\|X - p_F^\perp(Y)\|^2 - 1 - \|p_F^\perp(Y)\|^2 \right) = -X \cdot p_F^\perp(Y),$$

donc car $X \in F$ et que p_F^\perp est une application linéaire :

$$\begin{aligned}
\psi^2(X, p_F^\perp(Y)) &\leq \frac{1}{c} \left(2\|p_F^\perp(Y)\| + \|X - p_F^\perp(Y)\|^2 - 1 - \|p_F^\perp(Y)\|^2 \right) \\
&= \frac{1}{c} \|p_F^\perp(X - Y)\|^2 - \frac{1}{c} (\|p_F^\perp(Y)\| - 1)^2 \\
&\leq \frac{1}{c} \|p_F^\perp(X - Y)\|^2 \\
&\leq \frac{1}{c} \|X - Y\|^2.
\end{aligned}$$

De plus, on a $X \cdot Y \geq 0$, donc d'après le lemme 2.20 :

$$\psi(X, Y) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \|X - Y\|,$$

donc

$$\psi^2(X, p_F^\perp(Y)) \leq \frac{1}{c} \|X - Y\|^2 \leq \frac{2}{c} \psi(X, Y)^2$$

soit

$$\psi(X, p_F^\perp(Y)) \leq c_1 \psi(X, Y)$$

ce qui est bien l'inégalité (5.4) voulue, avec $c_1 = \sqrt{2/c}$.

D'après la proposition 2.22, il existe A_j un sous-espace de A de dimension j , tel que

$$\forall X \in A_j \setminus \{0\}, \quad \exists Y \in D \setminus \{0\}, \quad \psi(X, Y) \leq \psi_j(A, D).$$

Soit $X \in A_j \setminus \{0\}$. Il existe donc $Y \in D \setminus \{0\}$ tel que

$$\psi(X, Y) \leq \psi_j(A, D).$$

Or $X \in A_j \subset A \subset F$ et $Y \in D \setminus \{0\} \subset \mathcal{R}$, on peut donc utiliser l'inégalité (5.4), qui donne

$$\psi(X, p_F^\perp(Y)) \leq c_1 \psi(X, Y) \leq c_1 \psi_j(A, D).$$

On a donc trouvé $Y' = p_F^\perp(Y) \in p_F^\perp(D)$ non nul (car $Y \in \mathcal{R}$ donc $Y \notin F^\perp$) tel que

$$\psi(X, Y') \leq c_1 \psi_j(A, D).$$

Autrement dit, on a montré que :

$$\forall X \in A \setminus \{0\}, \quad \exists Y' \in p_F^\perp(D) \setminus \{0\}, \quad \psi(X, Y') \leq c_1 \psi_j(A, D).$$

D'après la proposition 2.22, $\psi_j(A, p_F^\perp(D))$ est le plus petit réel ayant cette propriété, donc

$$\psi_j(A, p_F^\perp(D)) \leq c_1 \psi_j(A, D)$$

qui est l'inégalité cherchée. □

Démontrons maintenant le lemme 5.5, c'est-à-dire que $\mu_n(A|e)_j \leq \mu_k(\tilde{A}|e)_j$. Pour cela on commence par un lemme.

Lemme 5.11 Sous les hypothèses du théorème 5.1, pour tout $\alpha < \mu_n(A|e)_j$, il existe une suite $(B_N)_{N \in \mathbb{N}}$ de sous-espaces rationnels de \mathbb{R}^n de dimension e , deux à deux distincts, tels que pour tout N suffisamment grand :

$$B_N \cap F^\perp = \{0\} \quad \text{et} \quad \psi_j(A, B_N) \leq \frac{1}{H(B_N)^\alpha}.$$

Preuve. (Lemme 5.11)

Soit α' tel que $\alpha < \alpha' < \mu_n(A|e)_j$. Par définition de $\mu_n(A|e)_j$, il existe une suite $(B_N)_{N \in \mathbb{N}}$ de sous-espaces rationnels de \mathbb{R}^n de dimension e , deux à deux distincts, tels que pour tout N suffisamment grand

$$\psi_j(A, B_N) \leq \frac{1}{H(B_N)^{\alpha'}}.$$

La difficulté est que $B_N \cap F^\perp$ peut être non nul. Notons (g_1, \dots, g_{n-k}) une famille libre de vecteurs de \mathbb{Q}^n telle que

$$\mathbb{R}^n = F \oplus \text{Vect}(g_1, \dots, g_{n-k}). \quad (5.5)$$

On va construire des vecteurs $g_{n-k+1}, \dots, g_n \in \mathbb{Q}^n$ pour compléter la famille (g_1, \dots, g_{n-k}) . On pourra alors poser pour $I \subset \{1, \dots, n\}$:

$$G_I = \text{Vect}\{g_i, i \in I\}.$$

Pour $\ell \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{P}_m(\ell)$ l'ensemble des parties à m éléments de $\{1, \dots, \ell\}$. On montre par récurrence finie sur $\ell \in \{n-k, \dots, n\}$ qu'il existe g_{n-k+1}, \dots, g_ℓ des vecteurs de \mathbb{Q}^n tels que

$$\begin{cases} \dim \text{Vect}(g_1, \dots, g_\ell) = \ell \\ \forall I \in \mathcal{P}_{n-k}(\ell), \quad G_I \cap F = \{0\}. \end{cases} \quad (5.6)$$

Comme $\dim F = k$, la récurrence est initialisée pour $\ell = n-k$ avec (5.5).

Soit $\ell \in \{n-k, \dots, n-1\}$, supposons que les g_i pour $i \in \{n-k+1, \dots, \ell\}$ ont été construits et vérifient (5.6). Posons

$$G = \text{Vect}(g_1, \dots, g_\ell) \cup \bigcup_{K \in \mathcal{P}_{n-k-1}(\ell)} (F \oplus G_K).$$

L'ensemble G est une union d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels de dimension $n-1$, et d'un sous-espace de dimension $\ell \leq n-1$. On peut donc se donner un vecteur

$$g_{\ell+1} \in \mathbb{Q}^n \setminus G.$$

Montrons que ce vecteur vérifie bien (5.6). Comme $g_{\ell+1} \notin \text{Vect}(g_1, \dots, g_\ell)$, on a bien

$$\dim \text{Vect}(g_1, \dots, g_{\ell+1}) = \ell + 1.$$

On suppose par l'absurde qu'il existe $I \in \mathcal{P}_{n-k}(\ell+1)$ tel que $G_I \cap F \neq \{0\}$. Soit $u \in G_I \cap F \setminus \{0\}$. Par hypothèse de récurrence, on a $I \notin \mathcal{P}_{n-k}(\ell)$, donc $\ell+1 \in I$. On peut donc décomposer I sous la forme $I = K \cup \{\ell+1\}$ avec $K \in \mathcal{P}_{n-k-1}(\ell)$. Comme $u \notin F \cap G_K = \{0\}$, il existe $\alpha_{\ell+1} \neq 0$ et des $\alpha_i \in \mathbb{R}$ (pour $i \in K$) tels que

$$u = \alpha_{\ell+1} g_{\ell+1} + \sum_{i \in K} \alpha_i g_i.$$

Donc

$$g_{\ell+1} = \frac{1}{\alpha_{\ell+1}} \left(u - \sum_{i \in K} \alpha_i g_i \right) \in F \oplus G_K,$$

ce qui est absurde par définition de G car $g_{\ell+1} \notin G$. Donc $g_{\ell+1}$ vérifie (5.6), ce qui termine la récurrence.

Finalement, on a construit des vecteurs g_1, \dots, g_n vérifiant (5.6).

Pour $I \in \mathcal{P}_{n-k}(n)$, on a

$$\dim G_I = n - k = \dim F^\perp.$$

Donc $G_I \oplus F = \mathbb{R}^n$: il existe un isomorphisme rationnel $\rho_I \in \text{GL}_n(\mathbb{Q})$ tel que

$$\begin{cases} \rho_I|_F = \text{id}_F \\ \rho_I(G_I) = F^\perp. \end{cases}$$

Soit $N \in \mathbb{N}$. Supposons par l'absurde que

$$\forall I \in \mathcal{P}_{n-k}(n), \quad \rho_I(B_N) \cap F^\perp \neq \{0\},$$

soit

$$\forall I \in \mathcal{P}_{n-k}(n), \quad B_N \cap \rho_I^{-1}(F^\perp) \neq \{0\},$$

i.e. par définition de ρ_I :

$$\forall I \in \mathcal{P}_{n-k}(n), \quad B_N \cap G_I \neq \{0\}.$$

Notons

$$J = \left\{ i \in \{1, \dots, n\}, \exists \alpha \neq 0, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_{i-1} \in \mathbb{R}, \alpha g_i + \sum_{\ell=1}^{i-1} \lambda_\ell g_\ell \in B_N \right\}.$$

Supposons dans un premier temps que $\text{Card}(J) \leq k$. Il existe donc $I \in \mathcal{P}_{n-k}(n)$ tel que $I \cap J = \emptyset$. Or $B_N \cap G_I \neq \{0\}$, donc il existe une famille de réels $(\beta_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$ non tous nuls, tels que

$$\sum_{i \in I} \beta_i g_i \in B_N.$$

Notons i_0 le plus grand $i \in I$ tel que $\beta_i \neq 0$. Alors

$$\sum_{i \in I} \beta_i g_i = \alpha g_{i_0} + \sum_{i=1}^{i_0-1} \beta_i g_i,$$

en posant $\beta_i = 0$ si $i \notin I$ et $\alpha = \beta_{i_0} \neq 0$. Donc $i_0 \in J \cap I$, ce qui est absurde.

On a donc $\text{Card}(J) > k$. Les éléments de J donnent au moins $k + 1$ vecteurs linéairement indépendants de B_N , ce qui est absurde car $\dim B_N \leq k$.

Finalement, on a montré que

$$\exists I \in \mathcal{P}_{n-k}(n), \quad \rho_I(B_N) \cap F^\perp = \{0\}, \quad (5.7)$$

et on se donne un tel $I \in \mathcal{P}_{n-k}(n)$.

On a $\rho_I \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, donc d'après la proposition 2.26, il existe une constante $c(\rho_I) > 0$ telle que

$$\psi_j(A, \rho_I(B_N)) = \psi_j(\rho_I(A), \rho_I(B_N)) \leq c(\rho_I)\psi_j(A, B_N);$$

en effet $\rho_I(A) = A$ puisque $\rho_{I|F} = \text{id}_F$.

Alors en posant

$$c_2 = \max_{I \in \mathcal{P}_{n-k}(n)} c(\rho_I) > 0,$$

on a une constante indépendante de B_N telle que

$$\psi_j(A, \rho_I(B_N)) \leq c_2\psi_j(A, B_N).$$

De plus

$$\dim(\rho_I(B_N)) = \dim(B_N) = e$$

car ρ_I est un isomorphisme. On peut donc appliquer la proposition 2.16, qui donne une constante $c'(\rho_I) > 0$ telle que

$$H(\rho_I(B_N)) \leq c'(\rho_I)H(B_N),$$

et en posant

$$c_3 = \max_{I \in \mathcal{P}_{n-k}(n)} c'(\rho_I) > 0,$$

on a donc une constante indépendante de B_N telle que

$$H(\rho_I(B_N)) \leq c_3H(B_N).$$

On a donc, si N est suffisamment grand :

$$\psi_j(A, \rho_I(B_N)) \leq c_2\psi_j(A, B_N) \leq \frac{c_2}{H(B_N)^{\alpha'}} \leq \frac{c_2 c_3^{-\alpha'}}{H(\rho_I(B_N))^{\alpha'}} \leq \frac{1}{H(\rho_I(B_N))^\alpha}$$

ce qui termine la preuve du lemme 5.11. \square

Preuve. (Lemme 5.5)

Soit $\alpha < \mu_n(A|e)_j$. Le lemme 5.11 fournit une suite $(B_N)_{N \in \mathbb{N}}$ de sous-espaces rationnels de \mathbb{R}^n de dimension e , deux à deux distincts, tels que pour tout N suffisamment grand :

$$B_N \cap F^\perp = \{0\} \quad \text{et} \quad \psi_j(A, B_N) \leq \frac{1}{H(B_N)^\alpha}. \quad (5.8)$$

Soit $N \in \mathbb{N}$ suffisamment grand. On note p_F^\perp la projection orthogonale sur F . Comme $F \in \mathfrak{R}_n(k)$, p_F^\perp est un endomorphisme rationnel de \mathbb{R}^n .

Posons $B'_N = p_F^\perp(B_N)$ le projeté orthogonal de B_N sur F . Comme B_N est un sous-espace vectoriel rationnel, B'_N est aussi un sous-espace vectoriel rationnel.

On cherche à appliquer le lemme 5.4. Pour cela, il faut choisir convenablement un ensemble \mathcal{R} vérifiant l'hypothèse du lemme.

Posons \mathcal{R} – représenté sur la figure 5.1 – l'ensemble des vecteurs non nuls de \mathbb{R}^n formant un angle strictement inférieur à $\pi/4$ avec le sous-espace F , *i.e.*

$$\mathcal{R} = \left\{ X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \psi_1(F, \text{Vect}(X)) < \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}. \quad (5.9)$$

On a bien $\mathcal{R} \cap F^\perp = \emptyset$.

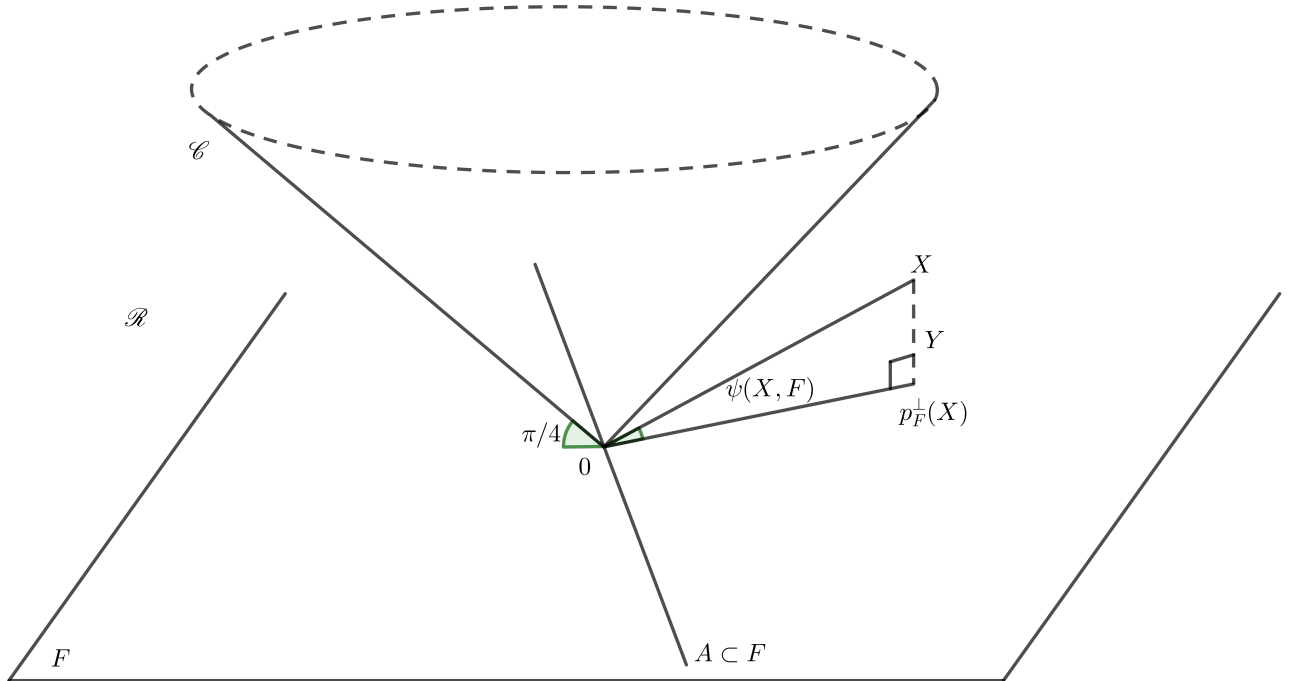


FIGURE 5.1 – Le cône \mathcal{C} faisant un angle $\pi/4$ avec le sous-espace F

Sur la figure 5.1, on a représenté le cône

$$\mathcal{C} = \{0\} \cup \left\{ X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \psi_1(F, \text{Vect}(X)) = \frac{\sqrt{2}}{2} \right\},$$

l'ensemble \mathcal{R} défini en (5.9) est alors la portion d'espace comprise entre F et \mathcal{C} .

Soit $X \in \mathcal{R}$. En posant $Y = X - p_F^\perp(X)$ (représenté sur la figure 5.1), on a

$$\|p_F^\perp(X)\|^2 + \|Y\|^2 = \|X\|^2.$$

Or $X \in \mathcal{R}$, donc d'après les lemmes 2.21 et 2.18 respectivement, on a

$$\psi(X, F) = \psi(X, p_F^\perp(X)) = \frac{\|Y\|}{\|X\|} < \frac{\sqrt{2}}{2},$$

donc

$$\|Y\| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \|X\|.$$

Ainsi,

$$\|p_F^\perp(X)\|^2 = \|X\|^2 - \|Y\|^2 \geq \|X\|^2 - \frac{1}{2} \|X\|^2 = \frac{1}{2} \|X\|^2,$$

et la partie \mathcal{R} construite vérifie bien les hypothèses du lemme 5.4 avec $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Notons $B_{N,j}$ le sous-espace vectoriel de B_N de dimension j donné par la proposition 2.22. Comme N est supposé suffisamment grand, on peut supposer que

$$\psi_j(A, B_N) \leq \frac{1}{2}.$$

La proposition 2.22 donne que pour tout $Y \in B_{N,j} \setminus \{0\}$, il existe $X \in A \subset F$ non nul tel que

$$\psi(X, Y) \leq \psi_j(A, B_N) \leq \frac{1}{2}.$$

On a donc

$$\psi_1(F, \text{Vect}(Y)) \leq \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2},$$

d'où $Y \in \mathcal{R}$.

Donc pour N suffisamment grand,

$$B_{N,j} \setminus \{0\} \subset \mathcal{R}.$$

On peut ainsi appliquer le lemme 5.4, qui donne l'existence d'une constante $c_4 > 0$ ne dépendant ni de A ni des B_N , telle que

$$\psi_j(A, B_N) = \psi_j(A, B_{N,j}) \geq c_4 \psi_j(A, p_F^\perp(B_{N,j})) \geq c_4 \psi_j(A, B'_N) \quad (5.10)$$

en appliquant le corollaire 2.23 car $B'_N = p_F^\perp(B_N) \supset p_F^\perp(B_{N,j})$.

Comme $B_N \cap F^\perp = \{0\}$ on a $\dim B'_N = e$; puisque $B'_N \subset F$, on peut poser

$$\tilde{B}_N = \varphi(B'_N) \in \mathfrak{A}_k(e).$$

D'après la proposition 2.26, il existe une constante $c_\varphi > 0$ telle que

$$\psi_j(\varphi(A), \varphi(B'_N)) \leq c_\varphi \psi_j(A, B'_N).$$

Soit $\beta > \mu_k(\tilde{A}|e)_j$; on a ainsi en utilisant la minoration (5.10) que pour N suffisamment grand (en fonction de β) :

$$\psi_j(A, B_N) \geq c_4 \psi_j(A, B'_N) \geq c_4 c_\varphi^{-1} \psi_j(\varphi(A), \varphi(B'_N)) = c_4 c_\varphi^{-1} \psi_j(\tilde{A}, \tilde{B}_N) \geq \frac{c_5}{H(\tilde{B}_N)^\beta}$$

avec $c_5 > 0$.

Or d'après la proposition 2.16, il existe $c_6 > 0$ telle que

$$H(\tilde{B}_N) = H(\varphi(B'_N)) \leq c_6 H(B'_N),$$

donc

$$\psi_j(A, B_N) \geq \frac{c_7}{H(B'_N)^\beta}$$

avec $c_7 > 0$.

Comme $B_N \cap F^\perp = \{0\}$, on a

$$\dim(p_F^\perp(B_N)) = \dim(B_N).$$

On peut donc appliquer la proposition 2.16 qui fournit une constante $c_8 > 0$ telle que

$$H(B'_N) = H(p_F^\perp(B_N)) \leq c_8 H(B_N),$$

donc, compte tenu de (5.8),

$$\frac{1}{H(B_N)^\alpha} \geq \psi_j(A, B_N) \geq \frac{c_9}{H(B_N)^\beta}$$

avec $c_9 > 0$. Comme $H(B_N)$ tend vers l'infini quand $N \rightarrow +\infty$, on en déduit $\alpha \leq \beta$. Ceci étant valable pour tout $\alpha < \mu_n(A|e)_j$ et pour tout $\beta > \mu_k(\tilde{A}|e)_j$ on obtient

$$\mu_n(A|e)_j \leq \mu_k(\tilde{A}|e)_j. \quad \square$$

Chapitre 6

Le spectre de $\mu_n(\bullet|\ell)_\ell$

Dans ce chapitre, on apporte une réponse partielle au problème 1.13.

On s'intéresse ici au spectre de $\mu_n(\bullet|\ell)_\ell$ sur $\mathfrak{I}_n(\ell, \ell)_\ell$, autrement dit à l'ensemble $\mu_n(\mathfrak{I}_n(\ell, \ell)_\ell|\ell)_\ell$. Le résultat obtenu est le suivant :

Théorème 6.1 Soient $n \geq 2$ et $\ell \in \{1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor\}$.

Alors

$$\left[1 + \frac{1}{2\ell} + \sqrt{1 + \frac{1}{4\ell^2}}, +\infty \right] \subset \left\{ \mu_n(A|\ell)_\ell, A \in \mathfrak{I}_n(\ell, \ell)_\ell \right\}.$$

Remarquons que

$$1 + \frac{1}{2\ell} + \sqrt{1 + \frac{1}{4\ell^2}} \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} 2.$$

Remarque 6.2 Il serait intéressant de pouvoir remplacer la borne $1 + 1/(2\ell) + \sqrt{1 + 1/(4\ell^2)}$ par l'exposant de Saxcé (voir sous-section 1.3.4), autrement dit de montrer que

$$\left[\frac{n}{\ell(n-\ell)}, +\infty \right] \subset \left\{ \mu_n(A|\ell)_\ell, A \in \mathfrak{I}_n(\ell, \ell)_\ell \right\}.$$

Dans la section 6.1 on esquisse la preuve du théorème 6.1. On commence par supposer que $n = 2\ell$, et on fixe $\beta < +\infty$ dans l'intervalle du théorème 6.1. On cherche alors à construire un sous-espace vectoriel d'exposant β . Le lemme 6.3 permet de construire un sous-espace $A \in \mathfrak{I}_{2\ell}(\ell, \ell)_\ell$. Le lemme 6.6 donne $\mu_{2\ell}(A|\ell)_\ell \geq \beta$, tandis que les lemmes 6.7 et 6.8 donnent à eux deux $\mu_{2\ell}(A|\ell)_\ell \leq \beta$. Finalement, $\mu_{2\ell}(A|\ell)_\ell = \beta$. Tous ces lemmes sont ensuite démontrés dans la section 6.2.

Le résultat est alors étendu au cas $n > 2\ell$ grâce au théorème 5.1, et au cas $\beta = +\infty$ dans la preuve du théorème 6.1 page 110.

6.1 Construction d'un sous-espace d'exposant prescrit

Soit $\ell \geq 1$ un entier ; posons $n = 2\ell$.
On se donne un réel β tel que

$$\beta \geq 1 + \frac{1}{2\ell} + \sqrt{1 + \frac{1}{4\ell^2}}, \quad (6.1)$$

et on va construire $A \in \mathfrak{I}_n(\ell, \ell)_\ell$, un sous-espace vectoriel (ℓ, ℓ) -irrationnel de \mathbb{R}^n tel que

$$\mu_n(A|\ell)_\ell = \beta.$$

Posons $\alpha = \ell\beta$, et pour tous $i, j \in \{1, \dots, \ell\}$

$$\xi_{i,j} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e_k^{(i,j)}}{\theta^{\lfloor \alpha^k \rfloor}}$$

où les $(e_k^{(i,j)})_{k \in \mathbb{N}}$ sont des suites à déterminer, à valeurs dans $\{1, 2\}$ si $i \neq j$ et à valeurs dans $\{2\ell, 2\ell + 1\}$ si $i = j$, et où θ est le plus petit nombre premier tel que

$$\theta > (n+1)^{n/2} \left(\frac{n}{2}\right)! = \ell! (2\ell + 1)^\ell. \quad (6.2)$$

Le fait de choisir ici *le plus petit* tel θ n'a pas d'autre intérêt que de permettre aux constantes de ne pas dépendre de θ . En pratique, tout nombre premier θ vérifiant (6.2) conviendrait.

L'hypothèse (6.2) sur θ et le fait que les $e_k^{(i,j)}$ appartiennent à $\{1, 2\}$ ou à $\{2\ell, 2\ell + 1\}$ seront utilisés dans la preuve du lemme 6.12 pour minorer la hauteur des sous-espaces rationnels construits ci-dessous.

Notons I_ℓ la matrice identité de $M_\ell(\mathbb{R})$. Posons $M_\xi = (\xi_{i,j})_{(i,j) \in \{1, \dots, \ell\}^2} \in M_\ell(\mathbb{R})$ la matrice des $\xi_{i,j}$ et M_A la matrice définie par blocs :

$$M_A = \begin{pmatrix} I_\ell \\ M_\xi \end{pmatrix} \in M_{2\ell, \ell}(\mathbb{R}). \quad (6.3)$$

On appelle $Y_1, \dots, Y_\ell \in \mathbb{R}^{2\ell}$ les colonnes de M_A , et on note A le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{2\ell}$ engendré par les Y_i :

$$A = \text{Vect}(Y_1, \dots, Y_\ell).$$

Remarquons que $\text{rg}(M_A) = \ell$, donc la famille (Y_1, \dots, Y_ℓ) est libre et

$$\dim A = \ell.$$

Énonçons un premier lemme montrant que le sous-espace A vérifie bien la condition de (ℓ, ℓ) -irrationnalité.

Lemme 6.3 Il existe des suites $(e_k^{(i,j)})_{k \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\{1, 2\}$ si $i \neq j$ et à valeurs dans $\{2\ell, 2\ell + 1\}$ si $i = j$, telles que

$$A \in \mathfrak{I}_n(\ell, \ell)_1.$$

A fortiori, on a $A \in \mathfrak{I}_n(\ell, \ell)_\ell$ puisque $\mathfrak{I}_n(\ell, \ell)_1 \subset \mathfrak{I}_n(\ell, \ell)_\ell$.

Dans toute la suite, on fixe des suites $(e_k^{(i,j)})_{k \in \mathbb{N}}$ vérifiant le lemme 6.3.

Le sous-espace A étant alors construit, on va désormais construire des sous-espaces rationnels B_N pour $N \geq 1$ approchant A jusqu'au ℓ -ième angle à l'exposant exactement β . Enfin, on montrera que ces sous-espaces B_N sont ceux approchant le mieux A , ce qui donnera finalement $\mu_n(A|\ell)_\ell = \beta$.

Posons pour $(i, j) \in \{1, \dots, \ell\}^2$ et $N \geq 1$,

$$f_N^{(i,j)} = \theta^{\lfloor \alpha^N \rfloor} \sum_{k=0}^N \frac{e_k^{(i,j)}}{\theta^{\lfloor \alpha^k \rfloor}} \in \mathbb{Z}$$

ainsi que M_{B_N} la matrice par blocs

$$M_{B_N} = \begin{pmatrix} \theta^{\lfloor \alpha^N \rfloor} I_\ell \\ F_N \end{pmatrix} \in M_{2\ell, \ell}(\mathbb{Z})$$

où F_N est la matrice $(f_N^{(i,j)})_{(i,j) \in \{1, \dots, \ell\}^2} \in M_\ell(\mathbb{Z})$.

Notons de plus $X_N^{(1)}, \dots, X_N^{(\ell)}$ les colonnes de M_{B_N} , et posons

$$B_N = \text{Vect}(X_N^{(1)}, \dots, X_N^{(\ell)}) \in \mathfrak{R}_{2\ell}(\ell).$$

On peut remarquer que pour tous $i, j \in \{1, \dots, \ell\}$, on a

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{e_k^{(i,j)}}{\theta^{\lfloor \alpha^k \rfloor}} \leq (2\ell + 1) \sum_{j=\lfloor \alpha^{N+1} \rfloor}^{\infty} \frac{1}{\theta^j} = \frac{2\ell + 1}{\theta^{\lfloor \alpha^{N+1} \rfloor}} \cdot \frac{1}{1 - 1/\theta} = \frac{2\ell + 1}{\theta^{\lfloor \alpha^{N+1} \rfloor}} \cdot \frac{\theta}{\theta - 1} < \frac{4\ell + 2}{\theta^{\lfloor \alpha^{N+1} \rfloor}}$$

car $\theta > 2$, donc

$$0 < \xi_{i,j} - \frac{f_N^{(i,j)}}{\theta^{\lfloor \alpha^N \rfloor}} = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{e_k^{(i,j)}}{\theta^{\lfloor \alpha^k \rfloor}} < \frac{4\ell + 2}{\theta^{\lfloor \alpha^{N+1} \rfloor}}. \quad (6.4)$$

Remarque 6.4 Comme $\ell \geq 1$ et comme β vérifie (6.1), on a

$$\alpha = \ell\beta \geq \ell + \frac{1}{2} + \sqrt{\ell^2 + \frac{1}{4}} \geq \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Dans le cas $\ell = 1$, on obtiendra donc comme cas particulier de la proposition 6.9 le résultat connu sur l'exposant d'irrationalité de $\xi_{1,1}$:

$$\mu \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e_k^{(1,1)}}{\theta^{\lfloor \alpha^k \rfloor}} \right) = \alpha$$

avec $(e_k^{(1,1)})_{k \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\{2, 3\}$, θ un nombre premier strictement supérieur à 3 et α un réel supérieur à $(3 + \sqrt{5})/2$. Les arguments de la section 8 de [LSV06] permettent de montrer facilement ce résultat, mais la méthode développée ici est différente (et celle-ci ne traite pas le cas $\theta = 3$). Si $2 \leq \alpha < (3 + \sqrt{5})/2$, on a encore $\mu(\xi_{1,1}) = \alpha$ grâce au théorème 2 de [Bug08].

Remarque 6.5 De façon similaire au cas $\ell = 1$, on peut se demander si on a encore $\mu_{2\ell}(A|\ell)_\ell = \beta$ lorsque β est plus petit que $1 + 1/(2\ell) + \sqrt{1 + 1/(4\ell^2)}$.

On montre dans le lemme suivant que les sous-espaces rationnels B_N approchent A à l'exposant α/ℓ :

Lemme 6.6 Il existe une constante $c_1 > 0$ dépendant uniquement de A telle que

$$\forall N \geq 1, \quad \psi_\ell(A, B_N) \leq \frac{c_1}{H(B_N)^{\alpha/\ell}}.$$

Ce lemme donne

$$\mu_{2\ell}(A|\ell)_\ell \geq \alpha/\ell.$$

Le lemme suivant montre que pour tout $\varepsilon > 0$, les B_N sont les seuls sous-espaces rationnels de dimension ℓ approchant A à l'exposant $\alpha/\ell + \varepsilon$, ce qui implique que le meilleur exposant possible est déterminé par les B_N .

Lemme 6.7 Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $C \in \mathfrak{R}_{2\ell}(\ell)$ tels que

$$\psi_\ell(A, C) \leq \frac{1}{H(C)^{\alpha/\ell + \varepsilon}}. \quad (6.5)$$

Alors si $H(C)$ est suffisamment grand (en fonction de ℓ et de ε), il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $C = B_N$.

Maintenant qu'on sait que si $N \in \mathbb{N}^*$ est suffisamment grand, les sous-espaces rationnels B_N sont ceux réalisant la meilleure approximation de A , on va montrer qu'ils approchent le sous-espace A à l'exposant au plus α/ℓ .

Lemme 6.8 Pour N suffisamment grand, on a

$$\psi_\ell(A, B_N) \geq \frac{c}{H(B_N)^{\alpha/\ell}}$$

avec $c > 0$ dépendant uniquement de A .

Les lemmes 6.7 et 6.8 combinés donnent

$$\mu_{2\ell}(A|\ell)_\ell \leq \alpha/\ell.$$

En comparant avec le lemme 6.6, on a ainsi obtenu la proposition suivante :

Proposition 6.9 Soit $\ell \geq 2$. Il existe $A \in \mathfrak{I}_{2\ell}(\ell, \ell)_\ell$ un sous-espace vectoriel (ℓ, ℓ) -irrationnel de $\mathbb{R}^{2\ell}$ tel que

$$\mu_{2\ell}(A|\ell)_\ell = \beta.$$

6.2 Les preuves

Dans cette section, on prouve les résultats énoncés sans démonstration dans la section 6.1 précédente. On démontre aussi le théorème 6.1.

Soit

$$\beta \in \left[1 + \frac{1}{2\ell} + \sqrt{1 + \frac{1}{4\ell^2}}, +\infty \right[.$$

On reprend les notations de la section 6.1.

Commençons par démontrer le lemme 6.3, qui affirme que le sous-espace A construit dans la section 6.1 est un sous-espace vectoriel $(\ell, 1)$ -irrationnel de \mathbb{R}^n .

Preuve.

On réindexe pour plus de clarté les $\xi_{i,j}$ pour $i, j \in \{1, \dots, \ell\}$, en $\xi_1, \dots, \xi_{\ell^2}$ par ordre lexicographique. On réindexe de la même façon les suites $(e_k^{(i,j)})_{k \in \mathbb{N}}$ en $(e_k^{(1)})_{k \in \mathbb{N}}, \dots, (e_k^{(\ell^2)})_{k \in \mathbb{N}}$.

Montrons qu'on peut choisir des suites $(e_k^{(1)})_{k \in \mathbb{N}}, \dots, (e_k^{(\ell^2)})_{k \in \mathbb{N}}$ telles que $\xi_1, \dots, \xi_{\ell^2}$ soient algébriquement indépendants sur \mathbb{Q} . On raisonne pour cela par récurrence finie sur $t \in \{1, \dots, \ell^2\}$.

L'exposant d'irrationalité de ξ_1 est minoré par $\alpha > 2$ (et même égal à α d'après la section 8 de [LSV06]), donc d'après le théorème de Roth (voir [Rot55] page 2), ξ_1 est transcendant.

Soit $t \in \{1, \dots, \ell^2 - 1\}$; supposons que les réels ξ_1, \dots, ξ_t sont algébriquement indépendants sur \mathbb{Q} . L'ensemble des réels algébriques sur $\mathbb{Q}(\xi_1, \dots, \xi_t)$ est dénombrable, tandis que l'ensemble des suites $(e_k^{(t+1)})_{k \in \mathbb{N}}$ ne l'est pas. On peut donc choisir une suite $(e_k^{(t+1)})_{k \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\{1, 2\}$ ou $\{2\ell, 2\ell + 1\}$ (selon que t correspond à un couple (i, j) avec $i \neq j$ ou $i = j$) telle que ξ_1, \dots, ξ_{t+1} soient algébriquement indépendants sur \mathbb{Q} , ce qui conclut la récurrence.

Vérifions que le sous-espace A ainsi construit appartient à $\mathfrak{I}_n(\ell, \ell)_1$. Supposons par l'absurde qu'il existe un sous-espace rationnel B de $\mathbb{R}^{2\ell}$ de dimension ℓ intersectant non trivialement A . Soit M_B une matrice dont les colonnes forment une base rationnelle de B . Comme $A \cap B \neq \{0\}$, on a

$$\det \begin{pmatrix} M_A & M_B \end{pmatrix} = 0$$

où M_A est la matrice définie à l'équation (6.3). Comme $M_B \in M_{2\ell, \ell}(\mathbb{Q})$, en développant ce déterminant par rapport aux ℓ premières colonnes grâce à un développement de Laplace (corollaire 2.7), on obtient un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X_1, \dots, X_{\ell^2}]$ tel que

$$\det \begin{pmatrix} M_A & M_B \end{pmatrix} = P(\xi_1, \dots, \xi_{\ell^2}) = 0.$$

Or $\xi_1, \dots, \xi_{\ell^2}$ sont algébriquement indépendants sur \mathbb{Q} , donc $P = 0$.

Comme

$$M_A = \begin{pmatrix} I_\ell \\ M_\xi \end{pmatrix},$$

en décomposant $M_B \in M_{2\ell, \ell}(\mathbb{Q})$ sous la forme

$$M_B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

avec $B_1, B_2 \in M_{\ell, \ell}(\mathbb{R})$, l'égalité $P = 0$ montre que

$$\forall Q \in M_\ell(\mathbb{R}), \quad \Delta_Q = \det \begin{pmatrix} I_\ell & B_1 \\ Q & B_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (6.6)$$

Énonçons un lemme sur les déterminants qui sera utile dans la suite de cette preuve.

Lemme 6.10 Soient $A_1, A_2, A_3, A_4 \in M_\ell(\mathbb{R})$ telles que $A_1 A_2 = A_2 A_1$. Alors

$$\det \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} = \det(A_4 A_1 - A_3 A_2).$$

Preuve. (Lemme 6.10)

Supposons que A_1 est inversible. On peut alors remarquer que

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_\ell & -A_2 A_1^{-1} \\ 0 & I_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & -A_1 A_2 A_1^{-1} + A_2 \\ A_3 & -A_3 A_2 A_1^{-1} + A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & -A_3 A_2 A_1^{-1} + A_4 \end{pmatrix}$$

car A_1 et A_2 commutent, donc

$$\det \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} = \det(-A_3 A_2 A_1^{-1} + A_4) \det(A_1) = \det(A_4 A_1 - A_3 A_2). \quad (6.7)$$

Si on ne suppose plus A_1 inversible, par densité de $GL_\ell(\mathbb{R})$ dans $M_\ell(\mathbb{R})$, on peut trouver une suite de matrices $(\tilde{A}_N)_{N \in \mathbb{N}}$ de $GL_\ell(\mathbb{R})$ qui converge vers A_1 et commutant avec A_2 . Alors par continuité du déterminant, l'égalité (6.7) est encore vraie. \square

Comme I_ℓ commute avec B_1 , on peut appliquer le lemme 6.10 ci-dessus, pour obtenir

$$\forall Q \in M_\ell(\mathbb{R}), \quad \Delta_Q = \det(B_2 - Q B_1) = 0. \quad (6.8)$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. En prenant $Q = \lambda I_\ell$, on a $\det(B_2 - \lambda B_1) = 0$. Supposons par l'absurde que B_1 est inversible, on a alors

$$0 = \Delta_Q = \det((B_2 B_1^{-1} - \lambda I_\ell) B_1) = \det(B_2 B_1^{-1} - \lambda I_\ell) \det(B_1)$$

donc car $\det(B_1) \neq 0$,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \det(B_2 B_1^{-1} - \lambda I_\ell) = 0.$$

On a montré que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λ est valeur propre de $B_2 B_1^{-1}$ ce qui est absurde.

Ainsi, $\det(B_1) = 0$. Notons

$$r = \text{rg}(B_1) < \ell.$$

Soient $U, V \in \text{GL}_\ell(\mathbb{R})$ deux matrices inversibles telles que

$$UB_1V = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_r & 0 \end{pmatrix} \in M_\ell(\mathbb{R}),$$

où on a noté

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix} \in M_{\ell,r}(\mathbb{R}).$$

On décompose

$$UB_2V = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} \in M_\ell(\mathbb{R})$$

où la matrice $C_1 \in M_{\ell,r}(\mathbb{R})$ est constituée des r premières colonnes de UB_2V , et la matrice $C_2 \in M_{\ell,\ell-r}(\mathbb{R})$ est constituée des $\ell - r$ dernières colonnes de UB_2V . Ainsi, on a des matrices équivalentes :

$$\begin{pmatrix} J_r & 0 \\ C_1 & C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} V \in M_{2\ell,\ell}(\mathbb{R}). \quad (6.9)$$

Comme I_ℓ commute avec UB_1V , on a d'après le lemme 6.10 que pour tout $Q \in M_\ell(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} I_\ell & UB_1V \\ UQU^{-1} & UB_2V \end{pmatrix} &= \det(UB_2V - UQU^{-1}UB_1V) \\ &= \det(U(B_2 - QB_1)V) \\ &= \det(U)\Delta_Q \det(V) \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'après (6.8). Ceci étant vrai pour tout $Q \in M_\ell(\mathbb{R})$, quitte à poser $Q' = UQU^{-1}$, on a aussi

$$\forall Q' \in M_\ell(\mathbb{R}), \quad \Delta'_{Q'} = \det \begin{pmatrix} I_\ell & UB_1V \\ Q' & UB_2V \end{pmatrix} = 0. \quad (6.10)$$

Soit $R \in M_{\ell,r}(\mathbb{R})$. Définissons une matrice Q' par blocs :

$$Q' = \begin{pmatrix} C_1 - R & 0 \end{pmatrix} \in M_\ell(\mathbb{R}).$$

On obtient, encore d'après le lemme 6.10 car I_ℓ et UB_1V commutent, que

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta'_{Q'} \\ &= \det(UB_2V - Q'UB_1V) \\ &= \det \left(\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C_1 - R & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} C_1 - C_1 + R & C_2 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} R & C_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si on avait $\text{rg}(C_2) = \ell - r$, alors d'après le théorème de la base incomplète, on pourrait trouver R telle que $\text{rg} \begin{pmatrix} R & C_2 \end{pmatrix} = \ell$, ce qui est absurde car son déterminant $\Delta'_{Q'}$ serait alors non nul. Donc $\text{rg}(C_2) < \ell - r$. Or avec (6.9), on en déduit

$$\text{rg}(M_B) = \text{rg} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} J_r & 0 \\ C_1 & C_2 \end{pmatrix} = r + \text{rg}(C_2) < r + \ell - r = \ell,$$

ce qui est absurde car $\dim B = \ell = \text{rg}(M_B)$.

Finalement, A intersecte trivialement tous les sous-espaces rationnels de $\mathbb{R}^{2\ell}$ de dimension ℓ , c'est-à-dire $A \in \mathfrak{I}_{2\ell}(\ell, \ell)_1$. Cela termine la preuve du lemme 6.3. \square

On fixe désormais dans toute la suite, des suites $(e_k^{(i,j)})_{k \in \mathbb{N}}$ vérifiant le lemme 6.3.

Avant de démontrer le lemme 6.6, montrons un lemme qui majore la hauteur des B_N . On verra plus loin (grâce au lemme 6.12) que cette majoration est optimale, à constante multiplicative près.

Lemme 6.11 Pour tout $N \geq 1$, on a

$$H(B_N) \leq c_2(\theta^{\lfloor \alpha^N \rfloor})^\ell$$

où $c_2 > 0$ dépend uniquement de ℓ .

Preuve.

On a

$$\left| f_N^{(i,j)} \right| \leq (2\ell + 1)\theta^{\lfloor \alpha^N \rfloor} \sum_{k=0}^N \frac{1}{\theta^{\lfloor \alpha^k \rfloor}} \leq 2(2\ell + 1)\theta^{\lfloor \alpha^N \rfloor} \quad (6.11)$$

car la minoration $\theta \geq 2$ donne

$$\sum_{k=0}^N \frac{1}{\theta^{\lfloor \alpha^k \rfloor}} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\theta^k} = \frac{\theta}{\theta - 1} \leq 2.$$

On a donc

$$\begin{aligned} H(B_N) &\leq \left\| X_N^{(1)} \wedge \dots \wedge X_N^{(\ell)} \right\| \\ &\leq \prod_{j=1}^{\ell} \left\| X_N^{(j)} \right\| \\ &\leq (2(2\ell + 1) \cdot \sqrt{2\ell})^{\ell} (\theta^{\lfloor \alpha^N \rfloor})^{\ell} \end{aligned}$$

car les 2ℓ coefficients de chaque $X_N^{(j)}$ sont inférieurs à $2(2\ell + 1) \cdot \theta^{\lfloor \alpha^N \rfloor}$. \square

Démontrons maintenant le lemme 6.6, selon lequel

$$\psi_{\ell}(A, B_N) \leq \frac{c_1}{H(B_N)^{\alpha/\ell}}$$

pour tout $N \geq 1$, avec une constante $c_1 > 0$ qui dépend uniquement de A .

Preuve.

Pour $i \in \{1, \dots, \ell\}$, notons $Z_N^{(i)} = \theta^{-\lfloor \alpha^N \rfloor} X_N^{(i)}$. On a $\|Y_i\| \geq 1$, ce qui donne en appliquant le lemme 2.19 que

$$\psi(X_N^{(i)}, Y_i) = \psi(Z_N^{(i)}, Y_i) \leq \frac{\|Z_N^{(i)} - Y_i\|}{\|Y_i\|} \leq c_3 (\theta^{\lfloor \alpha^N \rfloor})^{-\alpha} \quad (6.12)$$

avec $c_3 > 0$ ne dépendant que de ℓ , en utilisant (6.4). D'après la proposition 4.5, il existe des constantes $c_4, c_5 > 0$ ne dépendant que de A , telles que

$$\psi_{\ell}(A, B_N) \leq c_4 \sum_{i=1}^{\ell} \psi(X_N^{(i)}, Y_i) \leq \frac{c_5}{(\theta^{\lfloor \alpha^N \rfloor})^{\alpha}}. \quad (6.13)$$

D'après le lemme 6.11 qui donne $H(B_N) \leq c_2 (\theta^{\lfloor \alpha^N \rfloor})^{\ell}$, on a donc

$$\psi_{\ell}(A, B_N) \leq \frac{c_1}{H(B_N)^{\alpha/\ell}}$$

avec $c_1 > 0$ ne dépendant que de A . Ceci termine la preuve du lemme 6.6. \square

Montrons maintenant que les B_N sont les seuls sous-espaces rationnels de dimension ℓ approchant aussi bien A (*i.e.* à l'exposant α/ℓ). Ceci montrera que le meilleur exposant possible est déterminé par les B_N . Précisément, on démontre ici le lemme 6.7 : si $\varepsilon > 0$ et $C \in \mathfrak{R}_{2\ell}(\ell)$ sont tels que

$$\psi_\ell(A, C) \leq \frac{1}{H(C)^{\alpha/\ell + \varepsilon}}$$

et si $H(C)$ est suffisamment grand (en fonction de ℓ et de ε), alors il existe $N \geq 1$ tel que $C = B_N$.

Preuve.

Soient $\varepsilon > 0$ et $C \in \mathfrak{R}_{2\ell}(\ell)$ tels que

$$\psi_\ell(A, C) \leq \frac{1}{H(C)^{\alpha/\ell + \varepsilon}}. \quad (6.14)$$

Montrons que si $H(C)$ est suffisamment grand, alors il existe un entier $N \geq 1$ tel que $C = B_N$. Commençons par travailler avec $N \in \mathbb{N}^*$ quelconque, on le fixera par la suite.

Le sous-espace C est un sous-espace rationnel de dimension ℓ : il existe donc $v_1, \dots, v_\ell \in \mathbb{Z}^{2\ell}$ tels que (v_1, \dots, v_ℓ) soit une \mathbb{Z} -base de $C \cap \mathbb{Z}^{2\ell}$. On a alors

$$H(C) = \|v_1 \wedge \dots \wedge v_\ell\|.$$

Pour montrer que $C = B_N$ pour un certain entier N , montrons que tous les $X_N^{(i)}$ pour $i \in \{1, \dots, \ell\}$ sont dans $C = \text{Vect}(v_1, \dots, v_\ell)$. Par égalité des dimensions, on pourra conclure que $C = B_N$. Soit $i \in \{1, \dots, \ell\}$; considérons les $\ell + 1$ vecteurs $X_N^{(i)}, v_1, \dots, v_\ell$, et posons

$$Q = \begin{pmatrix} X_N^{(i)} & v_1 & \dots & v_\ell \end{pmatrix} \in M_{2\ell, \ell+1}(\mathbb{Z}).$$

Comme la famille (v_1, \dots, v_ℓ) est libre, pour montrer que $X_N^{(i)} \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_\ell)$, il suffit de montrer que $\text{rg}(Q) < \ell + 1$, *i.e.* que tous les mineurs $(\ell + 1) \times (\ell + 1)$ de Q sont nuls. Pour cela, on montre que

$$D = \left\| X_N^{(i)} \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_\ell \right\| = 0.$$

Notons p_C^\perp la projection orthogonale sur le sous-espace C (les notations introduites ici sont illustrées sur la figure 6.1), et h le vecteur

$$h = p_C^\perp(X_N^{(i)}) - X_N^{(i)}.$$

Alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell \in \mathbb{R}$ tels que le vecteur $X_N^{(i)}$ s'écrive sous la forme

$$X_N^{(i)} = \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j v_j - h.$$

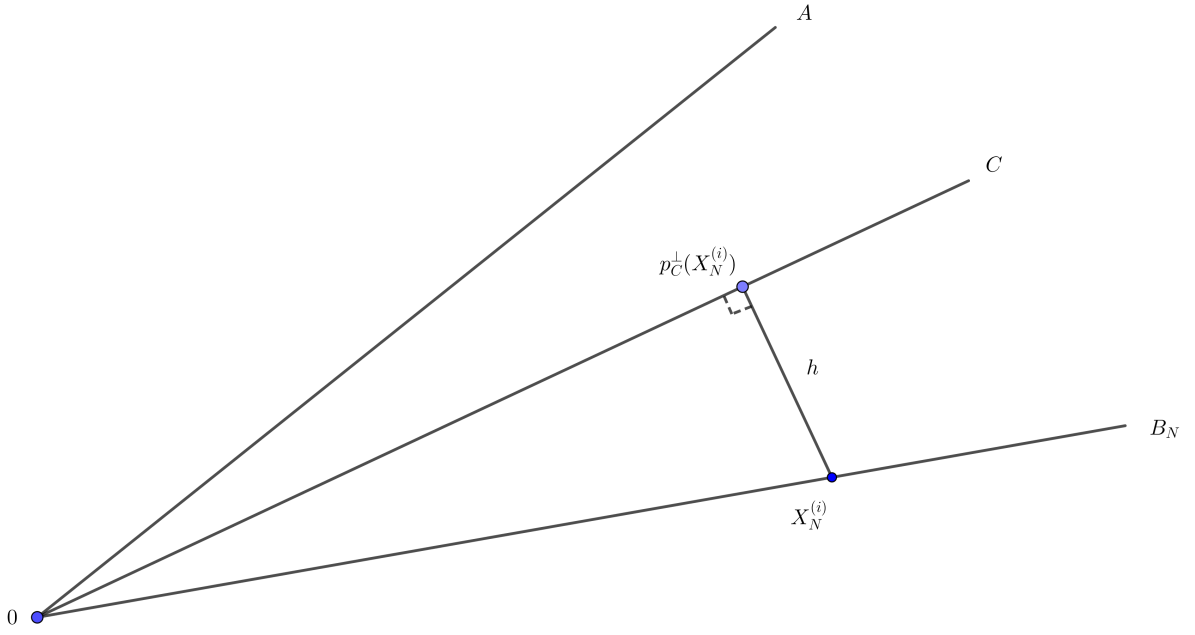


FIGURE 6.1 – Projection de $X_N^{(i)}$ sur C

Or $h \in C^\perp$, donc

$$\begin{aligned}
 D &= \left\| X_N^{(i)} \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_\ell \right\| \\
 &= \left\| \left(\sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j v_j - h \right) \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_\ell \right\| \\
 &= \|h\| \cdot \|v_1 \wedge \cdots \wedge v_\ell\| \\
 &= \|h\| H(C).
 \end{aligned}$$

De plus d'après le lemme 2.18, on a

$$\|h\| = \left\| X_N^{(i)} \right\| \psi_1(X_N^{(i)}, C),$$

donc

$$D = \left\| X_N^{(i)} \right\| \psi_1(X_N^{(i)}, C) H(C) \leq c_6 \theta^{\lfloor \alpha N \rfloor} (\psi(X_N^{(i)}, Y_i) + \psi_1(\text{Vect}(Y_i), C)) H(C)$$

avec $c_6 > 0$ ne dépendant que de ℓ , d'après l'équation (6.11) et en utilisant la proposition 2.25.

Or d'après le lemme 2.24, on a

$$\psi_1(\text{Vect}(Y_i), C) \leq \psi_\ell(A, C).$$

En utilisant alors la majoration (6.12) de la preuve du lemme 6.6 pour majorer $\psi(Y_i, X_N^{(i)})$, ainsi que la majoration (6.14) pour majorer $\psi_\ell(A, C)$, on trouve

$$D \leq c_6 \theta^{\lfloor \alpha^N \rfloor} H(C) \left(\frac{c_3}{(\theta^{\lfloor \alpha^N \rfloor})^\alpha} + \frac{1}{H(C)^{\alpha/\ell + \varepsilon}} \right) \leq c_7 \left(\frac{H(C)}{\theta^{\lfloor \alpha^N \rfloor(\alpha-1)}} + \frac{\theta^{\lfloor \alpha^N \rfloor}}{H(C)^{\alpha/\ell - 1 + \varepsilon}} \right) \quad (6.15)$$

où $c_7 > 0$ ne dépend que de ℓ .

On va désormais choisir N : notons N le plus grand entier tel que

$$\theta^{\alpha^N} \leq H(C)^{\alpha/\ell - 1 + \varepsilon/2}.$$

Alors

$$\theta^{\lfloor \alpha^N \rfloor} \leq H(C)^{\alpha/\ell - 1 + \varepsilon/2}. \quad (6.16)$$

De plus, par maximalité de N , on a

$$\left(\theta^{\alpha^N} \right)^\alpha = \theta^{\alpha^{N+1}} > H(C)^{\alpha/\ell - 1 + \varepsilon/2},$$

donc

$$\theta^{\alpha^N} > H(C)^{(\alpha/\ell - 1 + \varepsilon/2)/\alpha}.$$

Or

$$\alpha = \ell\beta \geq \ell + \frac{1}{2} + \sqrt{\ell^2 + \frac{1}{4}} = \frac{2\ell + 1 + \sqrt{1 + 4\ell^2}}{2},$$

donc

$$\alpha^2 - (2\ell + 1)\alpha + \ell \geq 0,$$

soit

$$(\alpha - \ell)(\alpha - 1) \geq \ell\alpha,$$

donc

$$\frac{\alpha/\ell - 1}{\alpha} \geq \frac{1}{\alpha - 1}.$$

Ainsi,

$$\theta^{\alpha^N} > H(C)^{1/(\alpha-1) + \varepsilon/(2\alpha)},$$

d'où

$$\theta^{\lfloor \alpha^N \rfloor} > \frac{1}{\theta} H(C)^{1/(\alpha-1) + \varepsilon/(2\alpha)}. \quad (6.17)$$

En utilisant la majoration (6.16) et la minoration (6.17), revenons à la majoration (6.15) de D :

$$\begin{aligned}
D &\leq c_7 \left(\frac{H(C)}{\theta^{\lfloor \alpha^N \rfloor (\alpha-1)}} + \frac{\theta^{\lfloor \alpha^N \rfloor}}{H(C)^{\alpha/\ell-1+\varepsilon}} \right) \\
&\leq c_7 \left(\frac{c_8 H(C)}{H(C)^{(1/(\alpha-1)+\varepsilon/(2\alpha))(\alpha-1)}} + \frac{H(C)^{\alpha/\ell-1+\varepsilon/2}}{H(C)^{\alpha/\ell-1+\varepsilon}} \right) \\
&\leq c_9 \left(\frac{1}{H(C)^{(\alpha-1)\varepsilon/(2\alpha)}} + \frac{1}{H(C)^{\varepsilon/2}} \right) \\
&\xrightarrow{H(C) \rightarrow +\infty} 0
\end{aligned}$$

avec $c_8, c_9 > 0$ dépendant uniquement de ℓ .

Si $H(C)$ est suffisamment grand (en fonction de ℓ et de ε , puisque $(\alpha-1)/(2\alpha) \geq (\ell-1)/(2\ell)$), on a $D < 1$. Or $E = \left\| X_N^{(i)} \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_\ell \right\|_\infty$ est un entier naturel tel que $E \leq D$, donc $E = 0$, c'est-à-dire

$$X_N^{(i)} \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_\ell = 0.$$

Finalement, si $H(C)$ est suffisamment grand, on a montré que $C = B_N$ pour N le plus grand entier tel que $\theta^{\alpha^N} \leq H(C)^{\alpha/\ell-1+\varepsilon/2}$. Ceci termine la preuve du lemme 6.6. \square

Avant de démontrer le lemme 6.8, commençons par minorer la hauteur des B_N (ce qui montre que le lemme 6.11 est optimal à constante multiplicative près).

Lemme 6.12 Pour tout N suffisamment grand, on a

$$H(B_N) \geq \tilde{c} (\theta^{\lfloor \alpha^N \rfloor})^\ell$$

avec $\tilde{c} > 0$ ne dépendant que de A .

Preuve. (Lemme 6.12)

Soit $N \geq 1$. Pour montrer la minoration voulue sur la hauteur de B_N , on va d'abord montrer que la famille $(X_N^{(1)}, \dots, X_N^{(\ell)})$ est une \mathbb{Z} -base de $B_N \cap \mathbb{Z}^{2\ell}$. Pour cela, notons P le paralléloétope engendré par $X_N^{(1)}, \dots, X_N^{(\ell)}$, i.e.

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i X_N^{(i)}, (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell) \in [0, 1]^\ell \right\},$$

et montrons que les 2^ℓ sommets de P sont ses seuls points entiers. Notons \mathcal{S} l'ensemble des 2^ℓ sommets de P , i.e.

$$\mathcal{S} = \left\{ \sum_{i=1}^{\ell} \delta_i X_N^{(i)}, (\delta_1, \dots, \delta_\ell) \in \{0, 1\}^\ell \right\}.$$

Supposons par l'absurde qu'il existe

$$X \in (P \setminus \mathcal{S}) \cap \mathbb{Z}^{2\ell}.$$

On a alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_\ell) \in [0, 1]^\ell \setminus \{0, 1\}^\ell$ tel que

$$X = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i X_N^{(i)} \in \mathbb{Z}^{2\ell}.$$

Les ℓ premières coordonnées de X donnent

$$\forall i \in \{1, \dots, \ell\}, \quad \lambda_i \theta^{\lfloor \alpha^N \rfloor} \in \mathbb{Z}.$$

Il existe donc des entiers $\gamma_1, \dots, \gamma_\ell \in \{0, \dots, \theta^{\lfloor \alpha^N \rfloor}\}$ tels que

$$\forall i \in \{1, \dots, \ell\}, \quad \lambda_i = \frac{\gamma_i}{\theta^{\lfloor \alpha^N \rfloor}}$$

car les λ_i sont dans $[0, 1]$ pour tout $i \in \{1, \dots, \ell\}$. De plus, les ℓ dernières coordonnées de X donnent

$$\forall i \in \{1, \dots, \ell\}, \quad \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j f_N^{(i,j)} \in \mathbb{Z},$$

soit

$$\forall i \in \{1, \dots, \ell\}, \quad \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\gamma_j}{\theta^{\lfloor \alpha^N \rfloor}} \cdot \theta^{\lfloor \alpha^N \rfloor} \sum_{k=0}^N \frac{e_k^{(i,j)}}{\theta^{\lfloor \alpha^k \rfloor}} = \sum_{k=0}^N \frac{1}{\theta^{\lfloor \alpha^k \rfloor}} \sum_{j=1}^{\ell} \gamma_j e_k^{(i,j)} \in \mathbb{Z}. \quad (6.18)$$

Pour $k \in \{0, \dots, N\}$, notons E_k la matrice $(e_k^{(i,j)})_{(i,j) \in \{1, \dots, \ell\}^2} \in M_\ell(\mathbb{Z})$, et Γ le vecteur colonne ${}^t(\gamma_1, \dots, \gamma_\ell)$. Ainsi, on peut réécrire sous forme matricielle les ℓ équations données par (6.18) :

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^N \frac{e_k^{(1,1)}}{\theta^{\lfloor \alpha^k \rfloor}} & \cdots & \sum_{k=0}^N \frac{e_k^{(1,\ell)}}{\theta^{\lfloor \alpha^k \rfloor}} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=0}^N \frac{e_k^{(\ell,1)}}{\theta^{\lfloor \alpha^k \rfloor}} & \cdots & \sum_{k=0}^N \frac{e_k^{(\ell,\ell)}}{\theta^{\lfloor \alpha^k \rfloor}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_\ell \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^\ell,$$

soit

$$\sum_{k=0}^N \frac{1}{\theta^{\lfloor \alpha^k \rfloor}} E_k \Gamma \in \mathbb{Z}^\ell,$$

ou encore, car on va s'intéresser plus particulièrement au dernier terme de la somme,

$$\sum_{k=0}^{N-1} \theta^{\lfloor \alpha^N \rfloor - \lfloor \alpha^k \rfloor} E_k \Gamma + E_N \Gamma \in \theta^{\lfloor \alpha^N \rfloor} \mathbb{Z}^\ell.$$

Comme $E_N \in M_\ell(\mathbb{Z})$, la transposée de sa comatrice appartient aussi à $M_\ell(\mathbb{Z})$, et donc

$$\sum_{k=0}^{N-1} \theta^{\lfloor \alpha^N \rfloor - \lfloor \alpha^k \rfloor} {}^t \text{com}(E_N) E_k \Gamma + {}^t \text{com}(E_N) E_N \Gamma \in \theta^{\lfloor \alpha^N \rfloor} \mathbb{Z}^\ell,$$

soit

$$\sum_{k=0}^{N-1} \theta^{\lfloor \alpha^N \rfloor - \lfloor \alpha^k \rfloor} {}^t \text{com}(E_N) E_k \Gamma + \det(E_N) \Gamma \in \theta^{\lfloor \alpha^N \rfloor} \mathbb{Z}^\ell.$$

Pour $i \in \{1, \dots, \ell\}$ et $k \in \{0, \dots, N-1\}$, notons $L_{k,i} \in M_{1,\ell}(\mathbb{Z})$ la i -ème ligne du produit ${}^t \text{com}(E_N) E_k$. Ainsi,

$$\forall i \in \{1, \dots, \ell\}, \quad \sum_{k=0}^{N-1} (L_{k,i} \Gamma) \theta^{\lfloor \alpha^N \rfloor - \lfloor \alpha^k \rfloor} + \det(E_N) \gamma_i \in \theta^{\lfloor \alpha^N \rfloor} \mathbb{Z}. \quad (6.19)$$

Soit $j \in \{1, \dots, \ell\}$. On peut commencer par remarquer que

$$e_N^{(j,j)} \geq 2\ell > 2(\ell-1) \geq \sum_{i \neq j} e_N^{(i,j)},$$

donc E_N est une matrice à diagonale strictement dominante (le cas $\ell = 1$ étant trivial car la somme de droite est alors vide – la matrice E_N est une matrice de $M_1(\mathbb{Z})$ dans ce cas). Elle est donc inversible, *i.e.*

$$\det(E_N) \neq 0. \quad (6.20)$$

De plus, on a $|e_N^{(i,j)}| \leq 2$ si $i \neq j$ et $|e_N^{(i,i)}| \leq 2\ell + 1$. Donc

$$|\det(E_N)| = \left| \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_\ell} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{\ell} e_N^{(i, \sigma(i))} \right| \leq \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_\ell} \prod_{i=1}^{\ell} |e_N^{(i, \sigma(i))}| \leq \ell! (2\ell + 1)^\ell < \theta$$

par définition de θ (qui est le plus petit nombre premier vérifiant la minoration (6.2)). Ainsi, comme $0 < |\det(E_N)| < \theta$, on a $v_\theta(\det(E_N)) = 0$, donc

$$v_\theta(\det(E_N) \gamma_i) = v_\theta(\det(E_N)) + v_\theta(\gamma_i) = v_\theta(\gamma_i).$$

On définit $u \geq 0$ et $i_0 \in \{1, \dots, \ell\}$ tels que

$$u = \min(v_\theta(\gamma_1), \dots, v_\theta(\gamma_\ell)) = v_\theta(\gamma_{i_0}).$$

Revenons alors à l'équation (6.19), qui s'écrit

$$\forall i \in \{1, \dots, \ell\}, \quad v_\theta \left(\sum_{k=0}^{N-1} (L_{k,i}\Gamma) \theta^{\lfloor \alpha^N \rfloor - \lfloor \alpha^k \rfloor} + \det(E_N) \gamma_i \right) \geq \lfloor \alpha^N \rfloor,$$

avec par convention $v_\theta(0) = +\infty$.

On a pour tout $k \in \{0, \dots, N-1\}$,

$$v_\theta(\theta^{\lfloor \alpha^N \rfloor - \lfloor \alpha^k \rfloor}) \geq \lfloor \alpha^N \rfloor - \lfloor \alpha^{N-1} \rfloor > 0,$$

et $L_{k,i}\Gamma$ est une combinaison \mathbb{Z} -linéaire des γ_i , donc

$$v_\theta(L_{k,i}\Gamma) \geq \min(v_\theta(\gamma_1), \dots, v_\theta(\gamma_\ell)) = u.$$

Or si $v_\theta(a) \neq v_\theta(b)$, alors $v_\theta(a+b) = \min(v_\theta(a), v_\theta(b))$. Donc pour $i = i_0$, on a

$$v_\theta \left(\sum_{k=0}^{N-1} (L_{k,i_0}\Gamma) \theta^{\lfloor \alpha^N \rfloor - \lfloor \alpha^k \rfloor} + \det(E_N) \gamma_{i_0} \right) = u \geq \lfloor \alpha^N \rfloor$$

car la valuation θ -adique du premier terme est strictement plus grande que u et que celle du second est égale à u . Finalement, par définition de u , on a

$$\forall i \in \{1, \dots, \ell\}, \quad v_\theta(\gamma_i) \geq \lfloor \alpha^N \rfloor.$$

Or tous les γ_i sont dans $\{0, \dots, \theta^{\lfloor \alpha^N \rfloor}\}$, donc

$$\forall i \in \{1, \dots, \ell\}, \quad \gamma_i \in \{0, \theta^{\lfloor \alpha^N \rfloor}\},$$

soit $X \in \mathcal{S}$ ce qui est absurde.

On a donc montré que les seuls points entiers de P sont les points de \mathcal{S} , ce qui montre que la famille $(X_N^{(1)}, \dots, X_N^{(\ell)})$ est une \mathbb{Z} -base de $B_N \cap \mathbb{Z}^{2\ell}$.

Ainsi, d'après la proposition 2.14, on a

$$H(B_N) = \left\| X_N^{(1)} \wedge \dots \wedge X_N^{(\ell)} \right\|.$$

Or

$$\forall i \in \{1, \dots, \ell\}, \quad \theta^{-\lfloor \alpha^N \rfloor} X_N^{(i)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} Y_i,$$

donc

$$\left\| \theta^{-\lfloor \alpha^N \rfloor} X_N^{(1)} \wedge \dots \wedge \theta^{-\lfloor \alpha^N \rfloor} X_N^{(\ell)} \right\| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \|Y_1 \wedge \dots \wedge Y_\ell\|,$$

donc pour N suffisamment grand,

$$\left\| \theta^{-\lfloor \alpha^N \rfloor} X_N^{(1)} \wedge \dots \wedge \theta^{-\lfloor \alpha^N \rfloor} X_N^{(\ell)} \right\| \geq \frac{1}{2} \|Y_1 \wedge \dots \wedge Y_\ell\|.$$

Finalement, pour N suffisamment grand, on a

$$H(B_N) = \left(\theta^{\lfloor \alpha^N \rfloor} \right)^\ell \left\| \theta^{-\lfloor \alpha^N \rfloor} X_N^{(1)} \wedge \dots \wedge \theta^{-\lfloor \alpha^N \rfloor} X_N^{(\ell)} \right\| \geq \tilde{c} \left(\theta^{\lfloor \alpha^N \rfloor} \right)^\ell$$

avec $\tilde{c} > 0$ ne dépendant que de A , ce qui termine la preuve du lemme 6.12. \square

On peut désormais démontrer le lemme 6.8, selon lequel

$$\psi_\ell(A, B_N) \geq \frac{c}{H(B_N)^{\alpha/\ell}}$$

pour tout N suffisamment grand, où la constante c dépend seulement de A .

Preuve. (Lemme 6.8)

Posons $Z_N^{(1)} = \theta^{-\lfloor \alpha^N \rfloor} X_N^{(1)}$ et notons p_A^\perp la projection orthogonale sur A . D'après le lemme 2.21, on a

$$\psi_1(\text{Vect}(Z_N^{(1)}), A) = \psi(Z_N^{(1)}, p_A^\perp(Z_N^{(1)})).$$

Avec le lemme 2.24, on a donc

$$\psi_\ell(A, B_N) \geq \psi_1(\text{Vect}(Z_N^{(1)}), A) = \psi(Z_N^{(1)}, p_A^\perp(Z_N^{(1)})). \quad (6.21)$$

Posons

$$\Delta = p_A^\perp(Z_N^{(1)}) - Y_1,$$

ainsi que

$$\omega = \left\| p_A^\perp(Z_N^{(1)}) - Z_N^{(1)} \right\|.$$

On décompose $p_A^\perp(Z_N^{(1)})$ dans la base (Y_1, \dots, Y_ℓ) :

$$p_A^\perp(Z_N^{(1)}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i Y_i = {}^t \left(\lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_\ell \quad \star \quad \dots \quad \star \right)$$

où les \star sont des coefficients non précisés, car pour tout $i \in \{1, \dots, \ell\}$,

$$Y_i = {}^t \left(\delta_{i,1} \quad \dots \quad \delta_{i,\ell} \quad \star \quad \dots \quad \star \right)$$

en notant δ le symbole de Kronecker. On a aussi pour tout $i \in \{1, \dots, \ell\}$,

$$Z_N^{(i)} = {}^t \left(\delta_{i,1} \quad \dots \quad \delta_{i,\ell} \quad \star \quad \dots \quad \star \right),$$

donc

$$\omega^2 = \left\| p_A^\perp(Z_N^{(1)}) - Z_N^{(1)} \right\|^2 \geq (\lambda_1 - 1)^2 + \sum_{i=2}^{\ell} \lambda_i^2,$$

donc

$$\begin{cases} |\lambda_1 - 1| \leq \omega \\ \forall i \in \{2, \dots, \ell\}, \quad |\lambda_i| \leq \omega. \end{cases} \quad (6.22)$$

Soit $j \in \{1, \dots, \ell\}$. On a

$$\|Y_j\|^2 = 1 + \sum_{i=1}^{\ell} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e_k^{(i,j)}}{\theta^{\lfloor \alpha^k \rfloor}} \right)^2.$$

Or $\alpha > 2$, $\theta \geq 2$ et $2\ell + 1 \leq \theta$ d'après la condition (6.2) sur θ , donc

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e_k^{(i,j)}}{\theta^{\lfloor \alpha^k \rfloor}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e_k^{(i,j)}}{\theta^k} \leq \frac{2\ell + 1}{\theta} \cdot \frac{1}{1 - 1/\theta} \leq \frac{\theta}{\theta - 1} \leq 2.$$

Donc

$$\|Y_j\| \leq \sqrt{1 + 4\ell} = c_{10}. \quad (6.23)$$

Or

$$\Delta = p_A^\perp(Z_N^{(1)}) - Y_1 = (\lambda_1 - 1)Y_1 + \sum_{i=2}^{\ell} \lambda_i Y_i,$$

donc avec les deux majorations de (6.22), on a

$$\|\Delta\| \leq c_{11}\omega \quad (6.24)$$

avec $c_{11} > 0$ ne dépendant que de ℓ .

On a

$$\begin{aligned} \left\| Z_N^{(1)} \wedge p_A^\perp(Z_N^{(1)}) \right\| &= \left\| Z_N^{(1)} \wedge (Y_1 + p_A^\perp(Z_N^{(1)}) - Y_1) \right\| \\ &= \left\| Z_N^{(1)} \wedge Y_1 + Z_N^{(1)} \wedge \Delta \right\| \\ &\geq \left\| Z_N^{(1)} \wedge Y_1 \right\| - \left\| Z_N^{(1)} \wedge \Delta \right\|. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Or

$$\begin{pmatrix} Z_N^{(1)} & Y_1 \end{pmatrix} \in M_{2\ell, 2}(\mathbb{R}),$$

donc en notant $\eta_{i,j}$ le mineur 2×2 correspondant aux lignes i et j avec $i < j$, on a

$$\left\| Z_N^{(1)} \wedge Y_1 \right\| = \sqrt{\sum_{1 \leq i < j \leq 2\ell} \eta_{i,j}^2} \geq |\eta_{1,\ell+1}|,$$

avec

$$\eta_{1,\ell+1} = \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \sum_{k=0}^N \frac{e_k^{(1,1)}}{\theta^{\lfloor \alpha^k \rfloor}} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e_k^{(1,1)}}{\theta^{\lfloor \alpha^k \rfloor}} \end{array} \right| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e_k^{(1,1)}}{\theta^{\lfloor \alpha^k \rfloor}} - \sum_{k=0}^N \frac{e_k^{(1,1)}}{\theta^{\lfloor \alpha^k \rfloor}} = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{e_k^{(1,1)}}{\theta^{\lfloor \alpha^k \rfloor}} \geq \frac{1}{\theta^{\lfloor \alpha^{N+1} \rfloor}}.$$

Donc

$$\left\| Z_N^{(1)} \wedge Y_1 \right\| \geq \frac{1}{\theta^{\lfloor \alpha^{N+1} \rfloor}}.$$

De plus, en suivant la preuve de (6.23), on démontre de même que $\left\| Z_N^{(1)} \right\| \leq c_{10}$, donc avec la majoration (6.24) de la norme de Δ , on a

$$\left\| Z_N^{(1)} \wedge \Delta \right\| \leq \left\| Z_N^{(1)} \right\| \cdot \|\Delta\| \leq c_{12}\omega$$

avec $c_{12} > 0$ ne dépendant que de ℓ . Donc d'après la minoration (6.25), on obtient

$$\left\| Z_N^{(1)} \wedge p_A^\perp(Z_N^{(1)}) \right\| \geq \frac{1}{\theta^{\lfloor \alpha^{N+1} \rfloor}} - c_{12}\omega.$$

Or $\left\| p_A^\perp(Z_N^{(1)}) \right\| \leq \left\| Z_N^{(1)} \right\| \leq c_{10}$, donc en utilisant le lemme 2.18, on a

$$\begin{aligned} \omega &= \left\| p_A^\perp(Z_N^{(1)}) - Z_N^{(1)} \right\| \\ &= \left\| Z_N^{(1)} \right\| \psi(p_A^\perp(Z_N^{(1)}), Z_N^{(1)}) \\ &= \left\| Z_N^{(1)} \right\| \frac{\left\| p_A^\perp(Z_N^{(1)}) \wedge Z_N^{(1)} \right\|}{\left\| Z_N^{(1)} \right\| \cdot \left\| p_A^\perp(Z_N^{(1)}) \right\|} \\ &\geq c_{13} \left\| p_A^\perp(Z_N^{(1)}) \wedge Z_N^{(1)} \right\| \\ &\geq \frac{c_{13}}{\theta^{\lfloor \alpha^{N+1} \rfloor}} - c_{14}\omega \end{aligned}$$

avec $c_{13}, c_{14} > 0$ ne dépendant que de ℓ . Finalement,

$$\omega \geq \frac{c_{13}}{1 + c_{14}} \cdot \frac{1}{\theta^{\lfloor \alpha^{N+1} \rfloor}} = \frac{c_{15}}{\theta^{\lfloor \alpha^{N+1} \rfloor}}$$

avec $c_{15} > 0$ ne dépendant que de ℓ . Reprenons la minoration (6.21), qui permet d'obtenir avec le lemme 2.18 :

$$\psi_\ell(A, B_N) \geq \psi(Z_N^{(1)}, p_A^\perp(Z_N^{(1)})) = \frac{\omega}{\left\| Z_N^{(1)} \right\|} \geq \frac{c_{16}}{\theta^{\lfloor \alpha^{N+1} \rfloor}} \quad (6.26)$$

où $c_{16} > 0$ ne dépend que de ℓ . Or

$$\lfloor \alpha^{N+1} \rfloor \leq \alpha^{N+1} \leq \lfloor \alpha^N \rfloor \alpha + \alpha,$$

donc

$$\frac{1}{\theta^{\lfloor \alpha^{N+1} \rfloor}} \geq \frac{1}{\theta^{\lfloor \alpha^N \rfloor \alpha + \alpha}} = \frac{1}{\theta^\alpha} \cdot \frac{1}{(\theta^{\lfloor \alpha^N \rfloor})^\alpha}.$$

De plus, d'après le lemme 6.12 il existe une constante $c_{17} > 0$ ne dépendant que de A telle que

$$H(B_N) \geq c_{17} \left(\theta^{\lfloor \alpha^N \rfloor} \right)^\ell,$$

donc en reprenant la minoration (6.26) on a

$$\psi_\ell(A, B_N) \geq \frac{c_{16}}{\theta^{\lfloor \alpha^{N+1} \rfloor}} \geq \frac{c_{16}}{\theta^\alpha} \cdot \frac{1}{\theta^{\alpha \lfloor \alpha^N \rfloor}} \geq \frac{c_{18}}{H(B_N)^{\alpha/\ell}}$$

avec $c_{18} > 0$ ne dépendant que de A . Ceci termine la preuve du lemme 6.8. \square

Finalement, démontrons le théorème 6.1.

Preuve.

Supposons dans un premier temps que $n = 2\ell$. Si

$$\beta \in \left[1 + \frac{1}{2\ell} + \sqrt{1 + \frac{1}{4\ell^2}}, +\infty \right],$$

la proposition 6.9 donne un sous-espace $A \in \mathfrak{I}_n(\ell, \ell)_\ell$ tel que $\mu_n(A|\ell)_\ell = \beta$. Si maintenant $\beta = +\infty$, posons pour $i, j \in \{1, \dots, \ell\}$

$$\xi_{i,j} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e_k^{(i,j)}}{3^{k^k}}$$

où les $(e_k^{(i,j)})_{k \in \mathbb{N}}$ sont des suites à déterminer, à valeurs dans $\{1, 2\}$. En reprenant les notations de la section 6.1, posons $M_\xi = (\xi_{i,j})_{(i,j) \in \{1, \dots, \ell\}^2} \in M_\ell(\mathbb{R})$ et notons A_∞ le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de la matrice

$$\begin{pmatrix} I_\ell \\ M_\xi \end{pmatrix} \in M_{2\ell, \ell}(\mathbb{R}).$$

De façon similaire au lemme 6.3, on peut choisir des suites $(e_k^{(i,j)})_{k \in \mathbb{N}}$ pour $i, j \in \{1, \dots, \ell\}$ telles que

$$A_\infty \in \mathfrak{I}_n(\ell, \ell)_\ell.$$

Posons pour $i, j \in \{1, \dots, \ell\}$ et $N \geq 1$,

$$f_N^{(i,j)} = 3^{N^N} \sum_{k=0}^N \frac{e_k^{(i,j)}}{3^{k^k}},$$

et notons $B_N \in \mathfrak{R}_{2\ell}(\ell)$ le sous-espace vectoriel rationnel engendré par les colonnes de

$$\begin{pmatrix} 3^{N^N} I_\ell \\ F_N \end{pmatrix} \in M_{2\ell, \ell}(\mathbb{R})$$

où $F_N = (f_N^{(i,j)})_{(i,j) \in \{1, \dots, \ell\}^2}$. De façon en tout point similaire au lemme 6.6, on peut montrer qu'il existe une constante $c > 0$ dépendant uniquement de A telle que

$$\forall N \geq 1, \quad \psi_\ell(A_\infty, B_N) \leq \frac{c}{H(B_N)^{N/\ell}}.$$

Ainsi,

$$\forall \kappa > 0, \quad \forall N \geq \kappa \ell, \quad \psi_\ell(A_\infty, B_N) \leq \frac{c}{H(B_N)^\kappa},$$

donc

$$\forall \kappa > 0, \quad \mu_n(A_\infty | \ell)_\ell \geq \kappa,$$

car en suivant la preuve du lemme 6.7 (plus précisément l'inégalité (6.13) page 99) on voit que $\psi_\ell(A_\infty, B_N)$ tend vers 0 quand $N \rightarrow \infty$, donc il y a une infinité de sous-espaces B_N deux à deux distincts.

Finalement,

$$\mu_n(A_\infty | \ell)_\ell = +\infty.$$

Considérons enfin le cas où $n > 2\ell$. Notons ϕ un isomorphisme rationnel de $\mathbb{R}^{2\ell}$ dans $\mathbb{R}^{2\ell} \times \{0\}^{n-2\ell}$. Posons $A' = \phi(A)$. D'après le théorème 5.1, on a $A' \in \mathfrak{I}_n(\ell, \ell)_\ell$ et

$$\mu_n(A' | \ell)_\ell = \mu_{2\ell}(A | \ell)_\ell = \beta,$$

ce qui permet d'étendre le résultat aux entiers $n > 2\ell$. □

Bibliographie

- [BL05a] Y. BUGEAUD et M. LAURENT : Exponents of Diophantine Approximation and Sturmian Continued Fractions. *Annales de l'Institut Fourier*, 55(3): 773–804, 2005.
- [BL05b] Y. BUGEAUD et M. LAURENT : On exponents of homogeneous and inhomogeneous Diophantine approximation. *Moscow Mathematical Journal*, 5(4):747–766, 2005.
- [BL10] Y. BUGEAUD et M. LAURENT : On transfer inequalities in Diophantine approximation, II. *Mathematische Zeitschrift*, 265:249–262, 2010.
- [Bug08] Y. BUGEAUD : Diophantine approximation and Cantor sets. *Mathematische Annalen*, 341:677–684, 2008.
- [Cas57] J. W. S. CASSELS : *An Introduction to Diophantine Approximation*. Cambridge University Press, 1957.
- [CG15] P. CALDERO et J. GERMONI : *Histoires hédonistes de groupes et de géométries*, volume 2. Calvage & Mounet, 2015.
- [Chu82] G. V. CHUDNOVSKY : Hermite-Padé Approximations to Exponential Functions and Elementary Estimates of the Measure of Irrationality of π . *Lecture Notes in Mathematics*, 925, 1982.
- [dS20] N. de SAXCÉ : *Groupes arithmétiques et approximation diophantienne*. Mémoire en vue d'obtenir l'habilitation à diriger des recherches, Université Sorbonne Paris Nord, 2020.
- [Fis14] G. FISCHER : *Lineare Algebra*. Grundkurs Mathematik. Springer Spektrum, 18^{ème} édition, 2014.
- [Gro38] A. V. GRO SHEV : Un théorème sur les systèmes des formes linéaires. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 19:151–152, 1938.
- [Hat93] M. HATA : A Lower Bound for Rational Approximations to π . *Journal of Number Theory*, 43:51–67, 1993.
- [HW07] G. H. HARDY et E. M. WRIGHT : *Introduction à la Théorie des Nombres*. Springer, 5^{ème} édition, 2007.
- [Jar29] V. JARNÍK : Diophantische Approximationen und Hausdorffsches Mass. *Matematicheskii Sbornik*, 36(3-4):371–382, 1929.
- [KM98] D. Y. KLEINBOCK et G. A. MARGULIS : Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds. *Annals of Mathematics*, 148(1):339–360, 1998.
- [Lan02] S. LANG : *Algebra*. Springer-Verlag, 3^{ème} édition, 2002.

- [Lau09] M. LAURENT : On transfer inequalities in Diophantine approximation. *Cambridge University Press*, Analytic number theory, Essays in honour of Klaus Roth:306–314, 2009.
- [Lio44] J. LIOUVILLE : Nouvelle démonstration d’un théorème sur les irrationnels algébriques. *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l’Académie des sciences*, 18:910–911, 1844.
- [LSV06] J. LEVESLEY, C. SALP et S. L. VELANI : On a problem of K. Mahler : Diophantine approximation and Cantor sets. *Mathematische Annalen*, 338(1):97–118, 2006.
- [Mah53] K. MAHLER : On the approximation of π . *Indag Math.*, 15(1), 1953.
- [Mar18] A. MARNAT : Note on the spectrum of classical and uniform exponents of Diophantine approximation. *Acta Arithmetica*, 185(1-8), 2018.
- [Mig74] M. MIGNOTTE : Approximation rationnelle de π et quelques autres nombres. *Bull. Soc. math. France*, 37:121–132, 1974.
- [Mos20] N. MOSHCHEVITIN : Über die Winkel zwischen Unterräumen. *Colloquium Mathematicum*, 2020.
- [Niv63] I. NIVEN : *Diophantine Approximations*. Interscience Publishers, 1963.
- [Rot55] K. F. ROTH : Rational Approximations to Algebraic Numbers. *Mathematika*, 2, 1955.
- [Sal08] V. K. SALIKHOV : On the irrationality measure of π . *Uspekhi Mat. Nauk*, 63:163–164, 2008.
- [Sch67] W. M. SCHMIDT : On Heights of Algebraic Subspaces and Diophantine Approximations. *Annals of Mathematics*, 85(3):430–472, 1967.
- [Sch70] W. M. SCHMIDT : Simultaneous Approximation To Algebraic Numbers By Rationals. *Acta Math*, 125:189–201, 1970.
- [Sch80] W. M. SCHMIDT : *Diophantine Approximation*, volume 785 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1980.
- [Sei55] J. J. SEIDEL : Angles and distances in n -dimensional euclidean and non-euclidean geometry. *Indag Math.*, 17, 1955.
- [TT96] G. N. TEN HAVE et R. TIJDEMAN : Diophantine Approximation of Matrices. *Journal of Mathematics*, 26(3), 1996.
- [ZZ20] D. ZEILBERGER et W. ZUDILIN : The irrationality measure of π is at most 7.103205334137... *Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory*, 9(4):407–419, 2020.

Titre : Approximation rationnelle de sous-espaces vectoriels

Mots-clefs : Arithmétique, Approximation diophantienne, Géométrie des nombres

Résumé : Soient A et B deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n de dimensions respectives d et e avec $d + e \leq n$. La proximité entre A et B est mesurée par $t = \min(d, e)$ angles canoniques $0 \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_t \leq \pi/2$; on pose $\psi_j(A, B) = \sin \theta_j$. Si B est un sous-espace rationnel, sa complexité est mesurée par sa hauteur $H(B) = \text{covol}(B \cap \mathbb{Z}^n)$. On s'intéresse alors à l'exposant d'approximation $\mu_n(A|e)_j$ défini comme la borne supérieure (éventuellement égale à $+\infty$) de l'ensemble des $\beta > 0$ tels que l'inégalité $\psi_j(A, B) \leq H(B)^{-\beta}$ soit vérifiée pour une infinité de sous-espaces rationnels B de di-

mension e . On montre par exemple que la valeur minimale que prend $\mu_4(A|2)_1$ est 3 lorsque A décrit l'ensemble des plans de \mathbb{R}^4 tels que pour tout plan rationnel B on ait $A \cap B = \{0\}$, et on minore cette quantité dans le cas général. On montre aussi que si A est inclus dans un sous-espace rationnel F de dimension k , son exposant dans \mathbb{R}^n est le même que son exposant dans \mathbb{R}^k via un isomorphisme rationnel $F \rightarrow \mathbb{R}^k$, ce qui permet d'en déduire de nouvelles majorations. Enfin, on étudie les valeurs que peut prendre $\mu_n(A|e)_e$ lorsque A est un sous-espace de \mathbb{R}^n vérifiant $\dim(A \cap B) < e$ pour tout sous-espace rationnel B de dimension e .

Title: Rational approximation of linear subspaces

Keywords: Arithmetic, Diophantine approximation, Geometry of numbers

Abstract: Let A and B be two subspaces of \mathbb{R}^n of respective dimensions d and e with $d + e \leq n$. The proximity between A and B is measured by $t = \min(d, e)$ canonical angles $0 \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_t \leq \pi/2$; we set $\psi_j(A, B) = \sin \theta_j$. If B is a rational subspace, his complexity is measured by its height $H(B) = \text{covol}(B \cap \mathbb{Z}^n)$. We are interested in the exponent of approximation $\mu_n(A|e)_j$ defined as the upper bound (possibly equal to $+\infty$) of the set of $\beta > 0$ such that the inequality $\psi_j(A, B) \leq H(B)^{-\beta}$ holds for infinitely many rational subspaces B of dimension

e . We show for instance that the minimal value taken by $\mu_4(A|2)_1$ is 3 when A ranges through the set of planes of \mathbb{R}^4 such that for all rational planes B one has $A \cap B = \{0\}$, and we prove a lower bound in the general case. We also show that if A is included in a rational subspace F of dimension k , its exponent in \mathbb{R}^n is the same as its exponent in \mathbb{R}^k via a rational isomorphism $F \rightarrow \mathbb{R}^k$. This allows us to deduce new upper bounds. Finally, we study the values taken by $\mu_n(A|e)_e$ when A is a subspace of \mathbb{R}^n satisfying $\dim(A \cap B) < e$ for all rational subspaces B of dimension e .